गणित भाग-I

इयत्ता नववी

शासन निर्णय क्रमांक : अभ्यास-२११६/(प्र.क्र.४३/१६) एसडी-४ दिनांक २५.४.२०१६ अन्वये स्थापन करण्यात आलेल्या समन्वय समितीच्या दि.३.३.२०१७ रोजीच्या बैठकीमध्ये हे पाठ्यपुस्तक निर्धारित करण्यास मान्यता देण्यात आली आहे.

गणित

भाग -I

इयत्ता नववी

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे - ४११ ००४.

शेजारचा 'क्यू आर कोड' तसेच या पुस्तकात इतर ठिकाणी दिलेले 'क्यू आर कोड' स्मार्टफोनचा वापर करून स्कॅन करता येतात. स्कॅन केल्यावर आपल्याला या पाठ्यपुस्तकाच्या अध्ययन-अध्यापनासाठी उपयुक्त लिंक/लिंक्स (URL) मिळतील.

प्रथमावृत्ती : 2017

© **महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे – ४११ ००४.**

महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळाकडे या पुस्तकाचे सर्व हक्क राहतील. या पुस्तकातील कोणताही भाग संचालक, महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ यांच्या लेखी परवानगीशिवाय उद्धृत करता येणार नाही.

गणित विषयतज्ज्ञ समिती

डॉ. मंगला नारळीकर (अध्यक्ष)
डॉ. जयश्री अत्रे (सदस्य)
श्री. रमाकांत सरोदे (सदस्य)
श्री. दादासो सरडे (सदस्य)
श्री. संदीप पंचभाई (सदस्य)
श्रीमती लता टिळेकर (सदस्य)
श्रीमती उज्ज्वला गोडबोले (सदस्य-सचिव)

गणित विषय – राज्य अभ्यासगट सदस्य

श्रीमती पूजा जाधव
श्री. प्रमोद ठोंबरे
श्री. राजेंद्र चौधरी
श्री. आण्णापा परीट
श्री. श्रीपाद देशपांडे
श्री. बन्सी हावळे
श्री. उमेश रेळे
श्री. चंदन कुलकर्णी
श्रीमती अनिता जावे
श्रीमती बागेश्री चव्हाण
श्री. कल्याण कडेकर
श्री. संदेश सोनावणे
श्री. सुजित शिंदे
डॉ. हनुमंत जगताप
श्री. प्रताप काशिद
श्री. काशिराम बाविसाने
श्री. पप्पु गाडे
श्रीमती रोहिणी शिर्के
श्री. राम व्हन्याळकर
श्री. अन्सार शेख
श्रीमती सुवर्णा देशपांडे
श्री. गणेश कोलते
श्री. सुरेश दाते
श्री. प्रकाश झेंडे
श्री. श्रीकांत रत्नपारखी
श्री. सूर्यकांत शहाणे
श्री. प्रकाश कापसे
श्री. सलीम हाश्मी
श्रीमती आर्या भिडे
श्री. मिलिंद भाकरे
श्री. ज्ञानेश्वर माशाळकर
श्री. लक्ष्मण दावणकर
श्री. सुधीर पाटील
श्री. राजाराम बंडगर
श्री. प्रदीप गोडसे
श्री. रवींद्र खंदारे
श्री. सागर सकुडे

श्रीमती प्राजक्ती गोखले (निमंत्रित सदस्य)
श्री. वि. दि. गोडबोले (निमंत्रित सदस्य)
श्रीमती तरूबेन पोपट (निमंत्रित सदस्य)

प्रमुख संयोजक : **उज्ज्वला श्रीकांत गोडबोले**
प्र. विशेषाधिकारी गणित,
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे.

मुखपृष्ठ व सजावट : धनश्री मोकाशी, पुणे.
संगणकीय आरेखन : संदीप कोळी, मुंबई.
चित्रकार : धनश्री मोकाशी.

निर्मिती : **सच्चितानंद आफळे**
मुख्य निर्मिती अधिकारी
संजय कांबळे
निर्मिती अधिकारी
प्रशांत हरणे
सहा. निर्मिती अधिकारी

अक्षरजुळणी : गणित विभाग,
पाठ्यपुस्तक मंडळ, पुणे.

कागद : ७० जी.एस.एम. क्रीमवोव्ह
मुद्रणादेश : N/PB/2017-18/25,000
मुद्रक : SAKAL PAPERS PVT. LTD., KOLHAPUR

प्रकाशक

विवेक उत्तम गोसावी, नियंत्रक
पाठ्यपुस्तक निर्मिती मंडळ,
प्रभादेवी, मुंबई २५.

भारताचे संविधान

उद्देशिका

आम्ही, भारताचे लोक, भारताचे एक सार्वभौम समाजवादी धर्मनिरपेक्ष लोकशाही गणराज्य घडविण्याचा व त्याच्या सर्व नागरिकांस:

सामाजिक, आर्थिक व राजनैतिक **न्याय;**
विचार, अभिव्यक्ती, विश्वास, श्रद्धा
व उपासना यांचे **स्वातंत्र्य;**
दर्जाची व संधीची **समानता;**

निश्चितपणे प्राप्त करून देण्याचा
आणि त्या सर्वांमध्ये व्यक्तीची प्रतिष्ठा
व राष्ट्राची एकता आणि एकात्मता
यांचे आश्वासन देणारी **बंधुता**
प्रवर्धित करण्याचा संकल्पपूर्वक निर्धार करून;

आमच्या संविधानसभेत
आज दिनांक सव्वीस नोव्हेंबर, १९४९ रोजी
याद्वारे हे संविधान अंगीकृत आणि अधिनियमित करून स्वत:प्रत अर्पण करीत आहोत.

राष्ट्रगीत

जनगणमन-अधिनायक जय हे
भारत-भाग्यविधाता ।
पंजाब, सिंधु, गुजरात, मराठा,
द्राविड, उत्कल, बंग,
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा,
उच्छल जलधितरंग,
तव शुभ नामे जागे, तव शुभ आशिस मागे,
गाहे तव जयगाथा,
जनगण मंगलदायक जय हे,
भारत-भाग्यविधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे,
जय जय जय, जय हे ।।

प्रतिज्ञा

भारत माझा देश आहे. सारे भारतीय माझे बांधव आहेत.

माझ्या देशावर माझे प्रेम आहे. माझ्या देशातल्या समृद्ध आणि विविधतेने नटलेल्या परंपरांचा मला अभिमान आहे. त्या परंपरांचा पाईक होण्याची पात्रता माझ्या अंगी यावी म्हणून मी सदैव प्रयत्न करीन.

मी माझ्या पालकांचा, गुरुजनांचा आणि वडीलधाऱ्या माणसांचा मान ठेवीन आणि प्रत्येकाशी सौजन्याने वागेन.

माझा देश आणि माझे देशबांधव यांच्याशी निष्ठा राखण्याची मी प्रतिज्ञा करीत आहे. त्यांचे कल्याण आणि त्यांची समृद्धी ह्यांतच माझे सौख्य सामावले आहे.

प्रस्तावना

विद्यार्थी मित्रांनो,

इयत्ता नववीच्या वर्गात तुमचे स्वागत !

प्राथमिक शिक्षणाचा अभ्यासक्रम पूर्ण करून तुम्ही माध्यमिक स्तरावरील अभ्यासाला सुरूवात करत आहात. इयत्ता आठवीपर्यंत गणिताच्या अभ्यासासाठी एकच पाठ्यपुस्तक होते, आता गणित भाग I व गणित भाग II अशा दोन पाठ्यपुस्तकांचा अभ्यास करायचा आहे.

गणित भाग I या पाठ्यपुस्तकात संख्याज्ञान, बीजगणित, याशिवाय व्यावहारिक गणित, अर्थनियोजन आणि माहितीचे वर्गीकरण या क्षेत्रांतील घटकांची ओळख होईल. हा भाग सगळ्या विद्यार्थ्यांना अनेक क्षेत्रांत उपयोगी पडणार आहे. बीजगणित व सांख्यिकीमधील संबोध उच्चशिक्षणातील अभ्यासासाठी पायाभूत आहेत.

या पाठ्यपुस्तकात संकल्पना समजून घेण्यासाठी विविध कृती दिल्या आहेत. उजळणीसाठी तसेच सरावसंचांमध्येही कृती दिल्या आहेत. त्या कृती तुम्ही करायच्या आहेत. इंटरनेटच्या मदतीने पुस्तकातील संकल्पनांची आणखी काही माहिती व उदाहरणे मिळतात का, तेही पाहायचे आहे. कृती करताना, उदाहरणे सोडवताना, निष्कर्ष काढताना तुमच्या मित्रमैत्रिणींशी चर्चा करायची आहे. पाठ्यपुस्तकाचे सखोल वाचन, कृतियुक्त अध्ययन व सराव या त्रिसूत्रीतून ही गणित यात्रा तुम्ही आनंदात पार कराल यात शंका नाही.

चला तर मग ! आता शिक्षक, पालक, मित्र-मैत्रिणी, इंटरनेट या सगळ्यांना घेऊन गणिताचा अभ्यास करूया. या अभ्यासासाठी तुम्हांला अनेक शुभेच्छा !

(डॉ. सुनिल मगर)
संचालक
महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व
अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे

पुणे
दिनांक : २८ एप्रिल २०१७, अक्षय्य तृतीया
भारतीय सौर दिनांक : ८ वैशाख १९३९

इयत्ता ९ वी गणित भाग I अभ्यासक्रमातून खालील क्षमता विद्यार्थ्यांमध्ये विकसित होतील.

क्षेत्र	घटक	क्षमता विधाने
1. संख्याज्ञान	1.1 संच 1.2 वास्तव संख्या व वर्गकरणी	• संख्याप्रणालीतील संच व उपसंच ठरवता येणे. • सांत व अनंत संच ओळखता येणे. • संच दाखवण्यासाठी वेनचित्राचा उपयोग करता येणे. • संचावर आधारित उदाहरणे तयार करता येणे. • संख्यारेषेवरील प्रत्येक बिंदूशी निगडीत एक वास्तव संख्या आहे हे समजणे. • वर्गकरणीच्या संख्या ओळखून त्यावर क्रिया करता येणे.
2. बीजगणित	2.1 बहुपदी 2.2 दोन चलांतील रेषीय समीकरणे	• बहुपदीची ओळख व त्यांच्यावरील क्रिया करता येणे. • दोन चलांचा उपयोग करून शाब्दिक उदाहरणे सोडवता येणे.
3. व्यावहारिक गणित	3.1 अर्थनियोजन 3.2 गुणोत्तर प्रमाण	• विविध प्रकारची कर आकारणी समजणे व कर आकारणी करता येणे. • पगारदारांची आयकर गणना करता येणे. • समान गुणोत्तराच्या सिद्धांताचा उपयोग करता येणे. • समप्रमाण व व्यस्तप्रमाण यावर आधारित शाब्दिक उदाहरणे सोडवता येणे.
4.माहितीचे व्यवस्थापन (सांख्यिकी)	4.1 वारंवारता सारणी 4.2 केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे	• वर्गीकृत व अवर्गीकृत वारंवारता सारणी तयार करता येणे. • संचित वारंवारता सारणी तयार करता येणे. • दिलेल्या सामग्रीची केंद्रीय प्रवृत्ती ओळखून त्याच्या परिमाणांचा उपयोग करता येणे.

शिक्षकांसाठी सूचना

इयत्ता नववी भाग–I या पुस्तकात आलेल्या मूलभूत संकल्पना, मूर्ताकडून अमूर्ताकडे या पद्धतीने विकसित केलेले संबोध, अर्थशास्त्रातील गणिताशी निगडित संकल्पना, सांख्यिकी ह्या क्षेत्राचा विस्तार, अशा सर्व बाबी शिक्षकांनी बारकाईने अभ्यासाव्यात. वर्गामध्ये अध्यापन करताना प्रात्यक्षिके, कृती, चर्चा, प्रश्नोत्तरे, सामूहिक उपक्रम अशा विविध पद्धतींचा उपयोग करणे अपेक्षित आहे. त्यासाठी शिक्षकांनी पाठ्यपुस्तकाचे सखोल वाचन करून पाठ्यपुस्तकातील विविध कृती विद्यार्थ्यांकडून करून घ्याव्यात. त्याबरोबरच तशा अनेक नवीन कृती तयार करण्याचा प्रयत्न करावा.

गणितात आकडेमोडीपेक्षा मूळ संकल्पना समजणे जास्त महत्त्वाचे असते. विद्यार्थ्यांच्या तर्कसंगत विचारशक्तीला चालना देणारी विविध उदाहरणे पाठ्यपुस्तकात समाविष्ट केलेली आहेत. अशी अनेक उदाहरणे शिक्षक व विद्यार्थी यांनी मिळून तयार करावीत. पाठ्यपुस्तकात आव्हानात्मक उदाहरणे तारांकित करून दिली आहेत. विद्यार्थ्यांने वेगळा विचार करून एखादे उदाहरण तर्कशुद्ध पद्धतीने सोडवले असेल तर त्याला शिक्षकांनी प्रोत्साहन द्यावे.

मूल्यमापन करताना मुक्तप्रश्न व कृतिपत्रिका यांचाही विचार शिक्षकांनी करणे अपेक्षित आहे. अशी मूल्यमापन पद्धती विकसित करण्याचा शिक्षकांनी प्रयत्न करावा.

पाठ्यपुस्तकामध्ये नमुन्यादाखल जी प्रात्यक्षिकांची यादी दिली आहे, त्या व्यतिरिक्त तुम्ही स्वत:ही निरनिराळी प्रात्यक्षिके तयार करू शकता. पाठ्यपुस्तकातील विविध कृती या प्रात्यक्षिकांमध्ये अंतर्भूत केलेल्या आहेत. त्यादेखील विद्यार्थ्यांकडून करून घ्याव्यात. त्यावर आधारित मूल्यमापन पद्धतीचा उपयोग पुढच्या इयत्तांच्या क्षमता विकसित करण्याकरिता निश्चितच होईल अशी आम्हांस आशा आहे.

नमुना प्रात्यक्षिकांची यादी

(1) आपल्या वर्गातील सर्व विद्यार्थ्यांचा संच हा विश्वसंच मानून खो–खो, कबड्डी यांसारखे कोणतेही दोन खेळ खेळणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच वेन आकृतीने दाखविणे.

(2) संख्यारेषेवर $2+\sqrt{3}$, $5-\sqrt{2}$ यांसारख्या संख्या दाखवणे.

(3) तीन किंवा चार कोटी असणाऱ्या बहुपदींना रेषीय बहुपदीने विविध पद्धती वापरून भागणे व उत्तर एकच येते का, ते पाहणे.

(4) आयकर भरणाऱ्या व्यक्तीचे विवरणपत्र (वार्षिक उत्पन्न, गुंतवणूक इत्यादी बाबी) दिले असता त्याला भरावा लागणारा आयकर सारणीच्या आधारे काढणे.

(5) दिलेल्या संख्यात्मक माहितीवरून वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करणे.

(6) सहज उपलब्ध असलेल्या औषधाच्या पाकिटावरून त्यातील वेगवेगळ्या घटकांचे शतमान काढणे.

(7) एखादे आव्हानात्मक शाब्दिक उदाहरण दोन चले वापरून सोडवणे.

अनुक्रमणिका

प्रकरणे		पृष्ठे
1.	संच	1 ते 18
2.	वास्तव संख्या	19 ते 35
3.	बहुपदी	36 ते 56
4.	गुणोत्तर व प्रमाण	57 ते 79
5.	दोन चलांतील रेषीय समीकरणे	80 ते 92
6.	अर्थनियोजन	93 ते 107
7.	सांख्यिकी	108 ते 128
•	उत्तरसूची	129 ते 136

1 संच

चला, शिकूया.

- संच : ओळख
- संचाचे प्रकार
- वेन चित्रे
- समान संच, उपसंच
- विश्वसंच, पूरक संच
- छेद संच, संयोग संच
- संचातील घटकांची संख्या

जरा आठवूया.

खाली काही चित्रे दिली आहेत. त्यांमध्ये आपल्या परिचयाचे वस्तुसमूह आहेत.

				1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...
फुलांचा गुच्छ	किल्ल्यांचा जुडगा	पक्ष्यांचा थवा	वह्यांचा गठ्ठा	संख्यांचा गट

वरील प्रत्येक वस्तुसमूहासाठी आपण विशिष्ट शब्द वापरतो. या सर्व उदाहरणांत समूहांतील घटक आपणांस अचूक व नेमकेपणाने सांगता येतात. वस्तूंच्या अशा समूहांना 'संच' असे म्हणतात.

आता हे समूह पाहा. 'गावातील आनंदी मुले', 'वर्गातील हुशार मुले.' समूहाच्या या दोन्ही उदाहरणांमध्ये 'आनंदी' आणि 'हुशार' या दोन्ही शब्दांचे अर्थ सापेक्ष आहेत म्हणजे 'आनंदी' वृत्ती व 'हुशारी' या दोन्ही शब्दांचे अर्थ नेमकेपणाने सांगता येत नाहीत म्हणून या समूहांना संच म्हणता येणार नाही.

आता पुढे काही उदाहरणे दिली आहेत. त्यांतील कोणत्या समूहांना संच म्हणता येईल ते सांगा.

(1) आठवड्याचे सात वार
(2) एका वर्षाचे महिने
(3) वर्गातील शूर मुले
(4) पहिल्या 10 मोजसंख्या
(5) महाराष्ट्रातील बळकट गड-किल्ले
(6) आपल्या सूर्यमालेतील ग्रह

जाणून घेऊया.

संच (Sets)

ज्या समूहांतील घटक अचूक व नेमकेपणाने सांगता येतात, त्या समूहांना संच असे म्हणतात.

संचाला नाव देण्यासाठी सर्वसाधारणपणे A, B, C,.....,Z यांपैकी इंग्रजी वर्णमालेतील पहिल्या लिपीतील अक्षरे वापरतात.

संचाचे घटक दाखवण्यासाठी a, b, c,... यांपैकी इंग्रजी अक्षरे वापरतात.

a हा संच A चा घटक आहे हे '$a \in A$' असे लिहितात आणि a हा संच A चा घटक नाही हे दाखवण्यासाठी '$a \notin A$' असे लिहितात.

आता आपण संख्यांचे संच पाहू.

N = { 1, 2, 3, . . .} हा नैसर्गिक संख्यासंच (Set of natural numbers) आहे.

W = {0, 1, 2, 3, . . .} हा पूर्ण संख्यासंच (Set of whole numbers) आहे.

I = {..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, ...} हा पूर्णांक संख्यासंच (Set of integers) आहे.

Q हा सर्व परिमेय संख्यांचा संच (Set of rational numbers) आहे.

R हा वास्तव संख्यांचा संच (Set of real numbers) आहे.

संच लिहिण्याच्या पद्धती

संच लिहिण्याच्या दोन पद्धती आहेत.

(1) यादी पद्धती (Listing method or roster method)

या पद्धतीत संचाचे सर्व घटक महिरपी कंसात लिहितात व प्रत्येक घटक वेगळा दाखवण्यासाठी दोन लगतच्या घटकांमध्ये स्वल्पविराम देतात. यामध्ये घटकांचा क्रम महत्त्वाचा नसतो, पण सगळे घटक दर्शवणे आवश्यक असते.

उदा. 1 ते 10 मधील विषम संख्यांचा संच यादी पद्धतीने पुढीलप्रमाणे लिहिता येईल.

जसे, A = {3, 5, 7, 9} किंवा A = {7, 3, 5, 9}

जसे, remember या शब्दातील अक्षरांचा संच {r, e, m, b} असा लिहितात. येथे remember या शब्दात r, m, e ही अक्षरे एकापेक्षा अधिक वेळा आली असली तरी संचात ती एकदाच लिहिली आहेत .

(2) गुणधर्म पद्धती (Rule method or set builder form)

या पद्धतीत घटकांची यादी न करता संचाचा सर्वसाधारण घटक चलाने दर्शवून त्याच्यापुढे उभी रेघ काढतात. उभ्या रेघेपुढे त्या चलाचा गुणधर्म लिहितात. **उदा.** $A = \{x \mid x \in N, 1 < x < 10\}$ याचे वाचन संच A चे घटक x असे आहेत की, x ही 1 व 10 च्या दरम्यानची नैसर्गिक संख्या आहे, असे करतात.

उदा. B = { x | x ही 1 ते 10 मधील मूळ संख्या आहे.} यामध्ये 1 ते 10 मधील सर्व मूळसंख्यांचा समावेश होईल म्हणून B हा संच {2, 3, 5, 7} असा यादी पद्धतीनेही लिहिता येईल.

Q हा परिमेय संख्या संच गुणधर्म पद्धतीने पुढीलप्रमाणे लिहिता येतो.

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in I, q \neq 0 \right\}$$

याचे वाचन $\frac{p}{q}$ या स्वरूपाच्या अशा संख्या आहेत की, p ही कोणतीही पूर्णांक संख्या आणि q ही शून्येतर पूर्णांक संख्या असेल.

नमुना उदाहरणे : खालील उदाहरणांत प्रत्येक संच दोन्ही पद्धतींनी लिहिला आहे.

गुणधर्म पद्धत	**यादी पद्धत**
A = { x | x हा DIVISION या शब्दातील अक्षर आहे.}	A = {D, I, V, S, O, N}
B = { y | y ही संख्या अशी आहे की $y^2 = 9$}	B = { −3, 3}
C = { z | z ही 5 च्या पटीतील 30 पेक्षा लहान नैसर्गिक संख्या आहे.}	C = { 5, 10, 15, 20, 25}

उदा. : पुढील सारणीतील रिकाम्या जागा भरून ती सारणी पूर्ण करा

यादी पद्धत	गुणधर्म पद्धत
A = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}	A = { x | x ही 15 पेक्षा लहान सम नैसर्गिक संख्या आहे.}
....	B = { x | x ही 1 ते 20 मधील पूर्ण वर्गसंख्या आहे.}
C = { a, e, i, o, u}	....
....	D = { y | y हा इंद्रधनुष्यातील रंग आहे.}
....	P = { x | x ही पूर्णांक संख्या अशी आहे की, $-3 < x < 3$}
M = {1, 8, 27, 64, 125.......}	M = { x | x हा धन पूर्णांकांचा घन आहे.}

सरावसंच 1.1

(1) पुढील संच यादी पद्धतीने लिहा.

(i) सम पूर्णांक संख्यांचा संच (ii) 1 ते 50 मधील सम मूळ संख्यांचा संच

(iii) सर्व ऋण पूर्णांकांचा संच (iv) संगीतातील सात मूळ स्वरांचा संच

(2) खाली चिन्हांत दिलेली विधाने शब्दांत लिहा.

(i) $\frac{4}{3} \in Q$ (ii) $-2 \notin N$ (iii) P = { p | p ही विषम संख्या आहे.}

(3) कोणतेही दोन संच यादी पद्धतीने आणि गुणधर्म पद्धतीने लिहा.

(4) खालील संच यादी पद्धतीने लिहा.

(i) भारतीय सौर वर्षातील सर्व महिन्यांचा संच.

(ii) 'COMPLEMENT' या शब्दातील अक्षरांचा संच.

(iii) मानवाच्या सर्व ज्ञानेंद्रियांचा संच.

(iv) 1 ते 20 मधील मूळ संख्यांचा संच.

(v) पृथ्वीवरील खंडांचा संच.

(5) खालील संच गुणधर्म पद्धतीने लिहा.

(i) A = { 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

(ii) B = { 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48}

(iii) C = {S, M, I, L, E}

(iv) D = {रविवार, सोमवार, मंगळवार, बुधवार, गुरुवार, शुक्रवार, शनिवार}

(v) X = {a, e, t}

जाणून घेऊया.

संचांचे प्रकार (Types of sets)

संचाचे नाव	व्याख्या	उदाहरण
एकघटक संच (Singleton Set)	ज्या संचात फक्त एकच घटक असतो, अशा संचास 'एकघटक संच' असे म्हणतात.	A = {2} A हा सम मूळ संख्यांचा संच आहे.
रिक्त संच (Null Set) (Empty Set)	ज्या संचात दिलेल्या गुणधर्माचा एकही घटक नसतो, त्यास 'रिक्त संच' म्हणतात. हा संच { } किंवा ϕ (फाय) या चिन्हाने दाखवतात.	B = {x|x ही 2 व 3 मधील नैसर्गिक संख्या आहे.} $\therefore$ B = { } किंवा ϕ
सांत संच (Finite Set)	जो संच रिक्त आहे किंवा ज्या संचातील घटकांची संख्या मर्यादित असते व मोजता येते, त्याला 'सांत संच' म्हणतात.	C = {p| p ही 1 ते 22 मधील 4 ने विभाज्य संख्या आहे.} C = {4, 8, 12, 16, 20}
अनंत संच (Infinite Set)	ज्या संचातील घटकांची संख्या अमर्याद असते व मोजता येत नाही त्याला 'अनंत संच' म्हणतात.	N = {1, 2, 3, . . . }

उदा. पुढील संच यादी पद्धतीने लिहून त्यांचे सांत संच व अनंत संच असे वर्गीकरण करा.

(i) A = $\{x \mid x \in N$ आणि x ही विषम संख्या आहे.$\}$ (ii) B = $\{x \mid x \in N$ आणि $3x - 1 = 0\}$

(iii) C = $\{x \mid x \in N$ आणि x ही 7 ने विभाज्य संख्या आहे.$\}$

(iv) $D = \{(a, b) \mid a, b \in W, a + b = 9\}$ (v) $E = \{x \mid x \in I, x^2 = 100\}$

(vi) $F = \{(a, b) \mid a, b \in Q, a + b = 11\}$

उकल : (i) A = $\{x \mid x \in N$ आणि x ही विषम संख्या आहे.$\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ हा अनंत संच आहे.

(ii) $B = \{x \mid x \in N$ आणि $3x - 1 = 0\}$

$3x - 1 = 0 \quad \therefore 3x = 1 \quad x = \frac{1}{3}$

पण $\frac{1}{3} \notin N \quad \therefore B = \{ \quad \}$ $\therefore$ B हा सांत संच आहे.

(iii) C = $\{x \mid x \in N$ आणि x ही 7 ने विभाज्य संख्या आहे.$\}$

$C = \{7, 14, 21, . . . \}$ हा अनंत संच आहे.

(iv) $D = \{(a , b) \mid a, b \in W, a + b = 9\}$

आपण a आणि b च्या अशा जोड्या शोधू शकतो की, a, b पूर्ण संख्या असून a + b = 9 आहे. आधी a ची आणि नंतर b ची किंमत, असा क्रम ठेवून D हा संच यादी पद्धतीने पुढीलप्रमाणे लिहिता येईल.

$D = \{(0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1),(9, 0)\}$, या संचाचे घटक म्हणजेच संख्यांच्या जोड्या मोजता येतात व निश्चित आहेत.

$\therefore$ D हा संच, सांत संच आहे.

(v) $E = \{x \mid x \in I, x^2 = 100\}$

$E = \{-10, 10\}$. $\therefore$ E हा सांत संच आहे.

(vi) $F = \{(a, b) \mid a, b \in Q, a + b = 11 \}$

$F = \{(6, 5), (3, 8), (3.5,7.5), (-15, 26),. . .\}$ अशा असंख्य जोड्या मिळतात.

$\therefore$ F हा अनंत संच आहे.

हे लक्षात घ्या !

संख्यांचे N, W, I, Q, R हे सगळे संच अनंत संच आहेत.

जाणून घेऊया.

समान संच (Equal sets)

संच A मधील प्रत्येक घटक संच B मध्ये आणि B या संचातील प्रत्येक घटक हा संच A मध्ये असेल तर ते संच समान आहेत असे म्हणतात.

'A आणि B हे समान संच आहेत' हे चिन्हात A = B असे लिहितात.

उदा (1) $A = \{ x \mid x$ हे 'listen' या शब्दातील अक्षर आहे.$\}$ $\therefore A = \{ l, i, s, t, e, n\}$

$B = \{ y \mid y$ हे 'silent' या शब्दातील अक्षर आहे.$\}$ $\therefore B = \{ s, i, l, e, n, t\}$

A आणि B यांतील घटकांचा क्रम वेगवेगळा आहे, पण घटक तेच आहेत म्हणून A व B हे संच समान आहेत. म्हणजेच A = B आहे.

उदा (2) $A = \{x \mid x = 2n, n \in N, 0 < x \leq 10\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$B = \{ y \mid y$ ही समसंख्या आहे, $1 \leq y \leq 10\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$\therefore$ A व B हे समान संच आहेत.

आता खालील संचांचा विचार करू.

$C = \{1, 3, 5, 7\}$ $D = \{ 2, 3, 5, 7\}$

C आणि D समान संच आहेत असे म्हणता येईल का? अर्थातच नाही.

कारण $1 \in C, 1 \notin D, 2 \in D, 2 \notin C$

म्हणून C व D समान संच नाहीत. म्हणजेच $C \neq D$

उदा (3) जर $A = \{1, 2, 3\}$ आणि $B = \{ 1, 2, 3, 4\}$तर $A \neq B$ याचा पडताळा घ्या.

उदा (4) $A = \{x \mid x$ ही मूळ संख्या व $10 < x < 20\}$ आणि $B = \{11, 13, 17, 19\}$

येथे A = B आहे याचा पडताळा घ्या.

सरावसंच 1.2

(1) खालीलपैकी कोणते संच समान आहेत व कोणते नाहीत ते सकारण लिहा.

$A = \{ x \mid 3x - 1 = 2\}$

$B = \{ x \mid x$ नैसर्गिक संख्या आहे पण x मूळही नाही व संयुक्तही नाही.$\}$

$C = \{x \mid x \in N, x < 2\}$

(2) A व B समान आहेत का ते सकारण लिहा.

A = सम असलेल्या मूळसंख्या $B = \{x \mid 7x - 1 = 13\}$

(3) खालीलपैकी कोणते संच रिक्त आहेत ते सकारण लिहा.

(i) $A = \{ a \mid a$ ही शून्यापेक्षा लहान असणारी नैसर्गिक संख्या आहे.$\}$

(ii) $B = \{x \mid x^2 = 0\}$ (iii) $C = \{ x \mid 5x - 2 = 0, x \in N\}$

(4) खालीलपैकी कोणते संच सांत व कोणते अनंत आहेत ते सकारण लिहा.

(i) A = { x | x < 10, x ही नैसर्गिक संख्या}

(ii) B = {y | y < −1, y ही पूर्णांक संख्या}

(iii) C = तुमच्या शाळेतील 9 वी मधील सर्व विद्यार्थ्यांचा संच

(iv) तुमच्या गावातील रहिवाशांचा संच

(v) प्रयोगशाळेतील उपकरणांचा संच

(vi) पूर्ण संख्यासंच

(vii) परिमेय संख्यासंच

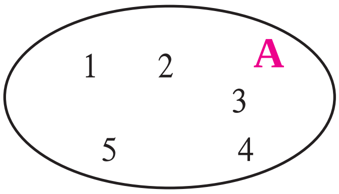
जाणून घेऊया.

वेन आकृती (Venn diagrams)

संच लिहिण्यासाठी बंदिस्त आकृत्यांचा उपयोग ब्रिटिश तर्कशास्त्रज्ञ जॉन वेन यांनी प्रथम केला. म्हणून अशा आकृत्यांना 'वेन आकृती' म्हणतात. वेगवेगळ्या संचांतील संबंध समजण्यासाठी आणि संचांवर आधारित उदाहरणे सोडवण्यासाठी या आकृत्यांचा चांगला उपयोग होतो. वेन आकृत्यांनी संच कसे दाखवले जातात ते खालील उदाहरणांवरून समजून घ्या.

उदा. A = { 1, 2, 3, 4, 5}

वेन आकृतीने A हा संच खाली दाखवला आहे.

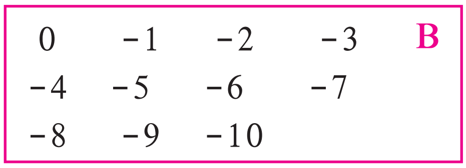


1834-1883

तर्कशास्त्र व संभाव्यता या विषयांना गणिती रूप देण्याचे काम जॉन वेन यांनी प्रथम केले. **'लॉजिक ऑफ चान्स'** हे त्यांचे प्रसिद्ध पुस्तक आाहे.

B = {x | $-10 \le x \le 0$, x पूर्णांक}

शेजारील वेन आकृती B हा संच दर्शवते.



उपसंच (Subset)

जर A आणि B हे दोन संच असतील आणि संच B चा प्रत्येक घटक, संच A चा देखील घटक असेल तर संच B ला संच A चा उपसंच म्हणतात आणि $B \subseteq A$ अशा चिन्हाने दाखवतात. त्याचे वाचन 'B उपसंच A' असे किंवा 'B हा A चा उपसंच आहे' असे करतात.

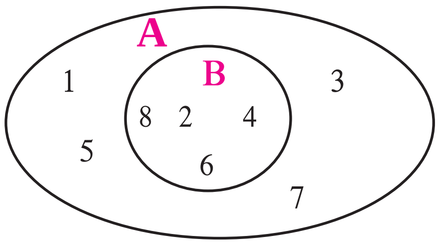
उदा (1) A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

B = {2, 4, 6, 8}

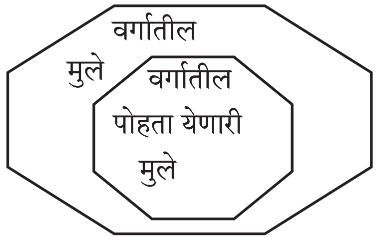
B मधील प्रत्येक घटक A चा देखील घटक आहे.

म्हणजेच $B \subseteq A$.

ही माहिती वेन आकृतीने कशी दाखवली आहे ते पाहा.



कृती : वर्गातील मुलांचा संच व त्याच वर्गातील पोहता येणाऱ्या मुलांचा संच वेन आकृतीने दाखवले आहेत.



त्याप्रमाणे खालील उपसंचांसाठी वेन आकृत्या काढा.

(1) (i) वर्गातील मुलांचा संच

(ii) वर्गातील सायकल चालवू शकणाऱ्या मुलांचा संच

(2) खाली काही फळांचा एक संच दिला आहे.

{पेरू, संत्रे, आंबा, फणस, चिकू, जांभूळ, सीताफळ, पपई, करवंद}

पुढील उपसंच दाखवा. (i) एक बी असणारी फळे (ii) एकापेक्षा जास्त बिया असणारी फळे

आता आणखी काही उपसंच पाहू.

उदा (2) N = नैसर्गिक संख्या संच. I = पूर्णांक संख्या संच.

येथे $N \subseteq I$. कारण सर्व नैसर्गिक संख्या ह्या पूर्णांक संख्या सुद्धा असतात हे आपल्याला माहीत आहे.

उदा (3) P = { x | x हे 25 चे वर्गमूळ आहे.} $S = \{ y \mid y \in I, -5 \leq y \leq 5\}$

यादी पद्धतीने P हा संच लिहू. $P = \{-5, 5\}$

यादी पद्धतीने S हा संच लिहू. $S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

येथे P चा प्रत्येक घटक S चा घटक आहे.

$\therefore P \subseteq S$

हे लक्षात ठेवूया.

(i) प्रत्येक संच स्वत:चा उपसंच असतो. म्हणजेच $A \subseteq A$

(ii) रिक्त संच हा प्रत्येक संचाचा उपसंच असतो. म्हणजेच $\phi \subseteq A$

(iii) जर A = B तर $A \subseteq B$ आणि $B \subseteq A$

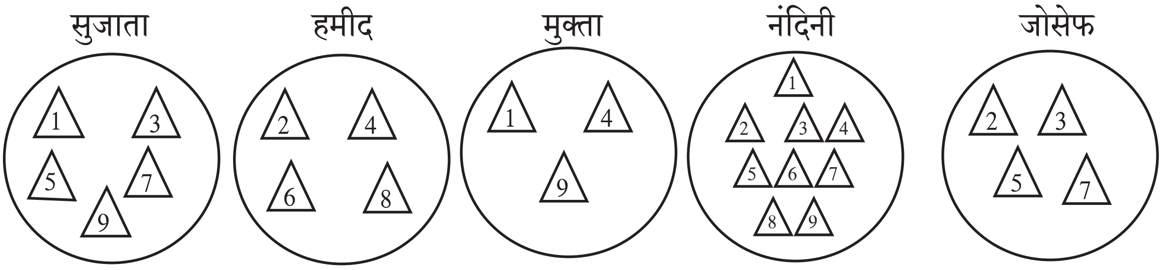
(iv) जर $A \subseteq B$ व $B \subseteq A$ तर A = B

उदा. A = { 1, 3, 4, 7, 8} या संचाचे उपसंच पाहू.

जसे P = { 1, 3}, T = {4, 7, 8}, V = {1, 4, 8}, S = {1, 4, 7, 8}

असे आणखी अनेक उपसंच तयार करता येतील. त्यांपैकी कोणतेही पाच उपसंच लिहा.

कृती : प्रत्येक विद्यार्थ्याने कागदाचे साधारण सारख्या आकाराचे नऊ त्रिकोण आणि एक थाळी घ्यावी. त्रिकोणावर 1 ते 9 या संख्या लिहाव्यात. मग प्रत्येकाने आपापल्या थाळीत संख्या लिहिलेले काही त्रिकोणी कागद ठेवावेत. आता प्रत्येकाजवळ 1 ते 9 या संख्या असणाऱ्या संचाचा उपसंच तयार होईल.



सुजाता, हमीद, मुक्ता, नंदिनी आणि जोसेफ यांच्या थाळ्यांमधून कोणकोणत्या संख्या दिसत आहेत ते पाहा. प्रत्येकाने कोणता विचार करून संख्या निवडल्या आहेत हे ओळखा. त्यावरून प्रत्येक संच गुणधर्म पद्धतीने लिहा.

चला, चर्चा करूया.

उदा. खाली काही संच दिलेले आहेत.

A = { ..., −4, −2, 0, 2, 4, 6, ...}   B = {1, 2, 3, ...}

C = {..., −12, −6, 0, 6, 12, 18.....}   D = {..., −8, −4, 0, 4, 8, ...}

I = { ....., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

यावरून पुढीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत यावर चर्चा करा.

(i) A हा B, C, D या प्रत्येक संचाचा उपसंच आहे. (ii) B हा वरील सर्व संचांचा उपसंच आहे.

जाणून घेऊया.

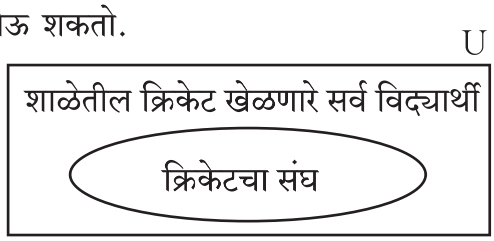
विश्वसंच (Universal set)

आपण ज्या संचांचा विचार करणार आहोत त्या सर्वांना सामावून घेणारा एक मोठा संच **विश्वसंच** म्हणून घेता येतो. त्याच्या बाहेरील घटकांचा आपण विचार करत नाही. विचारात घेतलेला प्रत्येक संच विश्वसंचाचा उपसंच असतो.

उदा (1) आपल्याला शाळेतील वारंवार अनुपस्थित राहणाऱ्या 9 वीच्या काही विद्यार्थ्यांच्या अनुपस्थितीचा अभ्यास करायचा आहे. त्यासाठी 9वी या इयत्तेतील विद्यार्थ्यांच्या संचाचा विचार करावा लागेल. येथे त्या इयत्तेतील सर्व विद्यार्थ्यांचा संच किंवा शाळेतील सर्व विद्यार्थ्यांचा संच हा विश्वसंच घेता येईल.

आता दुसरे उदाहरण पाहू.

उदा (2) आपल्याला शाळेतील क्रिकेट खेळणाऱ्या मुलांतून 15 मुलांचा संघ निवडायचा आहे; तर शाळेतील क्रिकेट खेळणाऱ्या सर्व खेळाडूंचा संच हा विश्वसंच होऊ शकतो.



त्यांतील योग्य त्या 15 खेळाडूंचा संघ हा त्या विश्वसंचाचा उपसंच आहे.

विश्वसंच साधारणपणे 'U' या अक्षराने दर्शवतात.

वेन आकृतीमध्ये विश्वसंच सामान्यत: आयताने दाखवतात.

पूरक संच (Complement of a set)

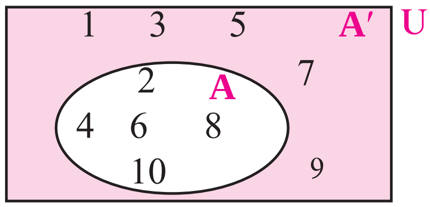
समजा U हा विश्वसंच आहे. जर $B \subseteq U$, तर संच B मध्ये नसलेल्या परंतु विश्वसंच U मध्ये असलेल्या घटकांच्या संचाला संच B चा पूरक संच म्हणतात. संच B चा पूरक संच B' किंवा B^C ने दर्शवतात.

$\therefore B' = \{x \mid x \in U$, आणि $x \notin B\}$ असे B' चे वर्णन करता येईल.

उदा (1) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

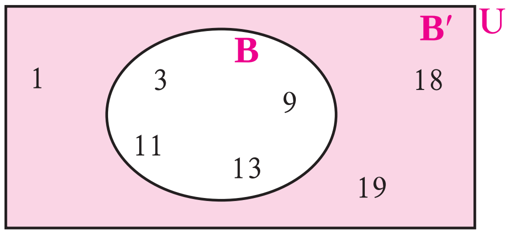
$\therefore A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$



उदा (2) समजा $U = \{1, 3, 9, 11, 13, 18, 19\}$

$B = \{3, 9, 11, 13\}$

$\therefore B' = \{1, 18, 19\}$



आता $(B')'$ काढा. त्यावरून काय निष्कर्ष निघतो?

$(B')'$ हा संच म्हणजे B' मध्ये नसलेल्या परंतु U मध्ये असलेल्या घटकांचा संच.

$(B')' = B$ मिळाले का?

वरील माहिती वेन आकृतीवरून समजून घ्या.

पूरक संचाचा पूरक संच म्हणजे दिलेला संच असतो.

हे लक्षात ठेवूया.

पूरक संचाचे गुणधर्म

(i) A आणि A' यांच्यामध्ये सामाईक घटक नसतो.

(ii) $A \subseteq U$ आणि $A' \subseteq U$

(iii) विश्वसंचाचा पूरक संच हा रिक्तसंच असतो. $U' = \phi$

(iv) रिक्तसंचाचा पूरक संच हा विश्वसंच असतो. $\phi' = U$

सरावसंच 1.3

(1) जर A = $\{a, b, c, d, e\}$, B = $\{c, d, e, f\}$, C = $\{b, d\}$, D = $\{a, e\}$ तर पुढीलपैकी कोणती विधाने सत्य व कोणती विधाने असत्य आहेत ते लिहा.

(i) $C \subseteq B$ (ii) $A \subseteq D$ (iii) $D \subseteq B$ (iv) $D \subseteq A$ (v) $B \subseteq A$ (vi) $C \subseteq A$

(2) 1 ते 20 मधील नैसर्गिक संख्यांचा विश्वसंच घेऊन X आणि Y वेन आकृतीने दाखवा.

(i) X = { x | $x \in$ N, आणि $7 < x < 15$}

(ii) Y = { y | $y \in$ N, y ही 1 ते 20 मधील मूळसंख्या आहे.}

(3) U = {1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

P = {1, 3, 7, 10}

तर (i) U, P आणि P′ वेन आकृतीने दाखवा. (ii) $(P')' = P$ याचा पडताळा घ्या.

(4) जर A = {1, 3, 2, 7} तर A या संचाचे कोणतेही तीन उपसंच लिहा.

(5) (i) पुढील संचांपैकी कोणते संच दुसऱ्या कोणत्या संचांचे उपसंच आहेत, ते लिहा.

P हा पुण्यातील रहिवाशांचा संच आहे. M हा मध्यप्रदेशातील रहिवाशांचा संच आहे.
I हा इंदौरमधील रहिवाशांचा संच आहे. B हा भारतातील रहिवाशांचा संच आहे.
H हा महाराष्ट्रातील रहिवाशांचा संच आहे.

(ii) वरीलपैकी कोणता संच या उदाहरणात विश्वसंच म्हणून घेता येईल?

(6*) खाली काही संच दिले आहेत. त्यांचा अभ्यास करताना कोणता संच त्या संचांसाठी विश्वसंच घेता येईल?

(i) A = 5 च्या पटीतील संख्यांचा संच, B = 7 च्या पाढ्यातील संख्यांचा संच.
C = 12 च्या पटीतील संख्यांचा संच.

(ii) P = 4 च्या पटीतील पूर्णांक संख्यांचा संच. T = सर्व सम वर्ग संख्यांचा संच.

(7) वर्गातील सर्व विद्यार्थ्यांचा संच हा विश्वसंच मानू. गणितात 50% किंवा त्यापेक्षा अधिक गुण मिळवणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच A मानला तर A चा पूरक संच लिहा.

जाणून घेऊया.

संचांवरील क्रिया

दोन संचांचा छेद (Intersection of two sets)

समजा A आणि B हे दोन संच आहेत. A आणि B या संचांमधील सामाईक घटकांच्या संचाला A आणि B या संचांचा छेदसंच असे म्हणतात. तो $A \cap B$ असा लिहितात आणि त्याचे वाचन A छेद B असे करतात.

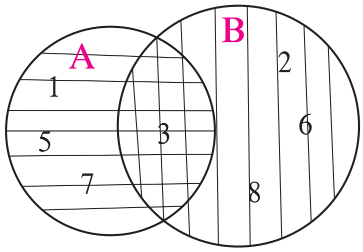
$\therefore$ $A \cap B = \{x \mid x \in A$ आणि $x \in B\}$

उदा (1) A = { 1, 3, 5, 7} B = { 2, 3, 6, 8}

आता वेन आकृती काढू.

A आणि B या दोन्ही संचांतील 3 हा सामाईक घटक आहे.

$\therefore A \cap B = \{3\}$



उदा (2) A = {1, 3, 9, 11, 13} B = {1, 9, 11}

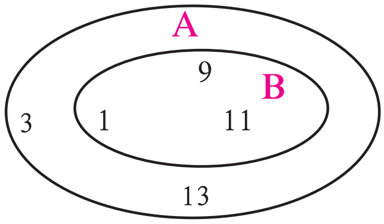
संच A व संच B मध्ये 1, 9, 11 हे सामाईक घटक आहेत.

$\therefore A \cap B = \{1, 9, 11\}$ परंतु $B = \{1, 9, 11\}$

$\therefore A \cap B = B$

येथे B हा A चा उपसंच आहे, हे लक्षात ठेवूया.

$\therefore$ जर $B \subseteq A$ तर $A \cap B = B$. तसेच जर $B \cap A = B$, तर $B \subseteq A$



हे लक्षात ठेवूया.

छेदसंचाचे गुणधर्म

(1) $A \cap B = B \cap A$

(2) जर $A \subseteq B$ तर $A \cap B = A$

(3) जर $A \cap B = B$ तर $B \subseteq A$

(4) $A \cap B \subseteq A$ आणि $A \cap B \subseteq B$

(5) $A \cap A' = \phi$

(6) $A \cap A = A$

(7) $A \cap \phi = \phi$

कृती : वेगवेगळी उदाहरणे घेऊन वरील गुणधर्मांचा पडताळा घ्या.

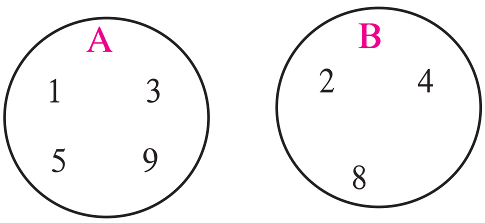
जाणून घेऊया.

विभिन्न संच (Disjoint sets)

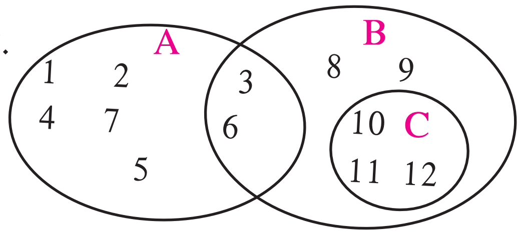
समजा, A = { 1, 3, 5, 9}

आणि B = {2, 4, 8} हे दोन संच दिले आहेत.

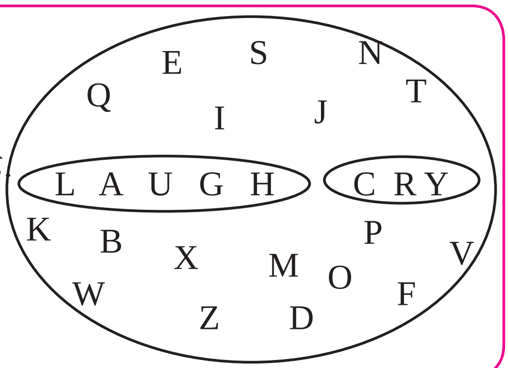
संच A व B मध्ये एकही सामाईक घटक नाही. म्हणजेच ते संच पूर्णपणे भिन्न किंवा विभक्त आहेत. म्हणून त्यांना 'विभक्त' किंवा 'विभिन्न' संच असे म्हणतात. या संचांची वेन आकृती पाहा.



कृती I : येथे A, B, C हे संच वेन आकृत्यांनी दाखवले आहेत. त्यांपैकी कोणते दोन संच विभिन्न आहेत ते लिहा.



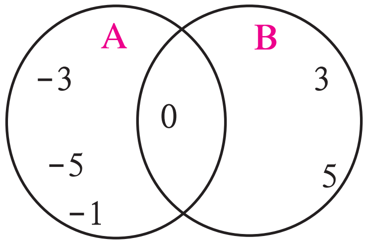
कृती II : इंग्रजी अक्षरांचा संच हा विश्वसंच आहे असे समजा.
येथे संचांचे घटक इंग्रजी अक्षरे आहेत.
समजा, LAUGH या शब्दातील अक्षरांचा एक संच आहे
आणि CRY या शब्दातील अक्षरांचा दुसरा संच आहे.
हे विभक्त संच आहेत, असे म्हणता येईल.
या दोन्ही संचांचा छेद रिक्त आहे हे अनुभवा.



दोन संचांचा संयोग (Union of two sets)

समजा, A आणि B हे दोन संच आहेत. या दोन्ही संचातील घटकांनी मिळून होणाऱ्या संचाला A आणि B या संचांचा संयोग संच म्हणतात. तो $A \cup B$ असा लिहितात आणि A संयोग B असा वाचतात.

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ किंवा $x \in B\}$



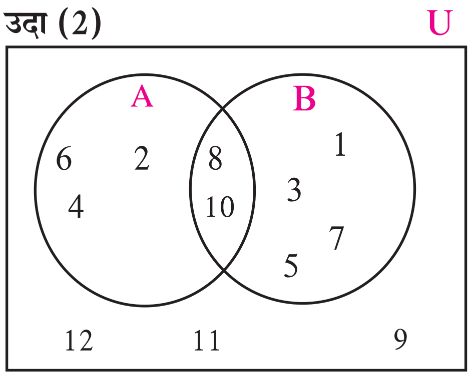
उदा (1) $A = \{-1, -3, -5, 0\}$

$B = \{0, 3, 5\}$

$A \cup B = \{-3, -5, 0, -1, 3, 5\}$

लक्षात घ्या की, $A \cup B = B \cup A$

उदा (2)



शेजारील वेन आकृतीत दर्शवलेल्या संचांवरून खालील संच यादी पद्धतीने लिहा.

(i) U (ii) A (iii) B (iv) $A \cup B$ (v) $A \cap B$

(vi) A' (vii) B' (viii) $(A \cup B)'$ (ix) $(A \cap B)'$

उकल : $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

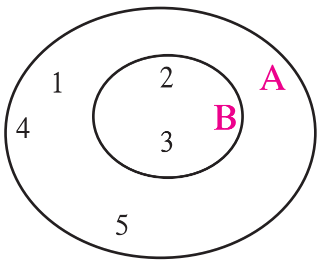
$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ $A \cap B = \{8, 10\}$

$A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 12\}$ $B' = \{2, 4, 6, 9, 11, 12\}$

$(A \cup B)' = \{9, 11, 12\}$ $(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$

उदा (3)



$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{2, 3\}$

आता या उदाहरणाची वेन आकृती पाहू.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

संच A आणि संच $A \cup B$ मध्ये नेमके तेच घटक आहेत.

यावरून, जर $B \subseteq A$ तर $A \cup B = A$

हे लक्षात ठेवूया.

संयोग संचाचे गुणधर्म

(1) $A \cup B = B \cup A$

(2) जर $A \subseteq B$ तर $A \cup B = B$

(3) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$

(4) $A \cup A' = U$

(5) $A \cup A = A$

(6) $A \cup \phi = A$

जाणून घेऊया.

संचातील घटकांची संख्या (Number of elements in a set)

समजा $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ हा दिलेला संच आहे. या संचात 5 घटक आहेत.

संच A मधील घटकांची संख्या $n(A)$ अशी दाखवतात. $\therefore n(A) = 5$

समजा $B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$ $\therefore n(B) = 6$

संयोग संच आणि छेद संच यांतील घटकांच्या संख्या

वरील संच A आणि संच B विचारात घेतल्यास,

$n(A) + n(B) = 5 + 6 = 11$ ----(1)

$A \cup B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 30, 36\}$ $\therefore n(A \cup B) = 9$--------(2)

$A \cap B$ काढू. म्हणजेच संच A आणि संच B मधील सामाईक घटक पाहू.

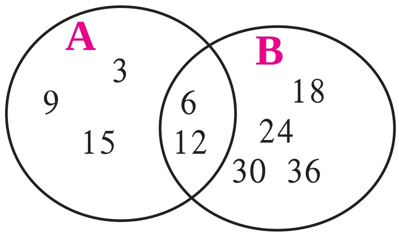
$A \cap B = \{6, 12\}$ $\therefore n(A \cap B) = 2$--------(3)

लक्षात घ्या, $n(A)$ आणि $n(B)$ मोजताना $A \cap B$ चे घटक दोनदा मोजले आहेत.

$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 6 - 2 = 9$ तसेच $n(A \cup B) = 9$

समीकरणे (1), (2) आणि (3) वरून असे दिसते की,

$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$



वरील नियमाचा पडताळा सोबतच्या वेन आकृतीवरून घ्या.

$n(A) = \square$, $n(B) = \square$

$n(A \cup B) = \square$, $n(A \cap B) = \square$

$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

हे लक्षात ठेवूया.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

म्हणजेच $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$

आता $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ $B = \{1, 2, 4, 6, 8, 12, 13\}$

हे संच घेऊन वरील नियमाचा पडताळा घ्या.

जाणून घेऊया.

संचांवर आधारित शाब्दिक उदाहरणे

उदा. एका वर्गात 70 विद्यार्थी आहेत. त्यांपैकी 45 विद्यार्थ्यांना क्रिकेट हा खेळ आवडतो. 52 विद्यार्थ्यांना खो-खो हा खेळ आवडतो. असा एकही विद्यार्थी नाही की ज्याला यांपैकी एकही खेळ आवडत नाही. तर क्रिकेट आणि खो-खो हे दोन्ही खेळ आवडणाऱ्या मुलांची संख्या काढा. फक्त क्रिकेट आवडणारी मुले किती ?

उकल : हे उदाहरण आपण दोन रीतींनी सोडवू.

रीत I : वर्गातील एकूण विद्यार्थी = 70

क्रिकेट आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच A मानू. खो-खो आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच B मानू.

प्रत्येक विद्यार्थ्याला क्रिकेट व खो-खो पैकी एक तरी खेळ आवडतो.

क्रिकेट किंवा खो-खो आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या म्हणजेच $n(A \cup B)$

$\therefore n(A \cup B) = 70$

क्रिकेट आणि खो-खो हे दोन्ही खेळ आवडणाऱ्या मुलांची संख्या = $n(A \cap B)$

$n(A) = 45, \quad n(B) = 52$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ हे आपल्याला माहीत आहे.

$\therefore n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

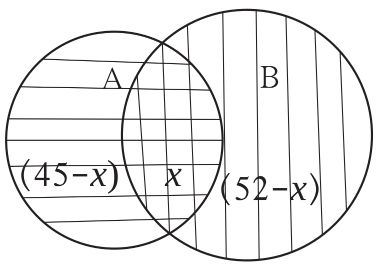
$= 45 + 52 - 70 = 27$

$\therefore$ दोन्ही खेळ आवडणारी मुले 27, क्रिकेट आवडणारी मुले 45 आहेत. $\therefore$ फक्त क्रिकेट आवडणारी मुले

$= 45 - 27 = 18$

$A \cap B$ हा दोन्ही खेळ आवडणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच आहे. $\therefore n(A \cap B) = 27$

रीत II : दिलेली माहिती वेन आकृतीत दर्शवूनही दोन्ही खेळ आवडणाऱ्या मुलांची संख्या पुढीलप्रमाणे काढता येते.



$n(A \cap B) = x$ मानू. $n(A) = 45$, $n(B) = 52$,

$n(A \cup B) = 70$ हे आपल्याला माहित आहे.

$\therefore n(A \cap B) = x = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 52 + 45 - 70 = 27$

वेन आकृती वरून फक्त क्रिकेट आवडणारी मुले $= 45 - 27$

$= 18$

सरावसंच 1.4

(1) जर $n(A) = 15$, $n(A \cup B) = 29$, $n(A \cap B) = 7$ तर $n(B)$ = किती?

(2) एका वसतिगृहात 125 विद्यार्थी आहेत, त्यांपैकी 80 विद्यार्थी चहा घेतात, 60 विद्यार्थी कॉफी घेतात आणि 20 विद्यार्थी चहा व कॉफी ही दोन्ही प्रकारची पेये घेतात, तर एकही पेय न घेणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या काढा.

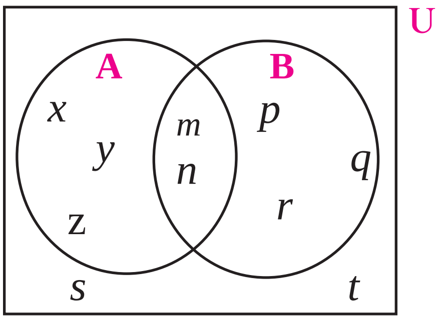
(3) एका स्पर्धा परीक्षेला 50 विद्यार्थी इंग्रजीत उत्तीर्ण झाले. 60 विद्यार्थी गणित विषयात उत्तीर्ण झाले. 40 विद्यार्थी दोन्ही विषयांत उत्तीर्ण झाले. एकही विद्यार्थी दोन्ही विषयांत अनुत्तीर्ण झाला नाही. तर एकूण विद्यार्थी किती होते ?

(4*) एका शाळेतील इयत्ता नववीच्या 220 विद्यार्थ्यांच्या आवडींचे सर्वेक्षण केले. त्यांपैकी 130 विद्यार्थ्यांनी गिरिभ्रमणाची आवड आहे असे सांगितले व 180 विद्यार्थ्यांनी आकाशदर्शनाची आवड आहे असे सांगितले. 110 विद्यार्थ्यांनी गिरिभ्रमण आवडते व आकाशदर्शनही आवडते असे सांगितले. तर किती विद्यार्थ्यांना या दोन्हींपैकी कशाचीच आवड नाही? किती विद्यार्थ्यांना फक्त गिरिभ्रमण आवडते? किती विद्यार्थ्यांना फक्त आकाशदर्शन आवडते?

(5) शेजारील वेन आकृतीवरून पुढील सर्व संच लिहा.

(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) U

(v) A' (vi) B' (vii) $(A \cup B)'$



संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

(1) खालील प्रश्नांसाठी अचूक पर्याय निवडा.

(i) $M = \{1, 3, 5\}$, $N = \{2, 4, 6\}$, तर $M \cap N$ = ?

(A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (B) $\{1, 3, 5\}$ (C) ϕ (D) $\{2, 4, 6\}$

(ii) $P = \{x \mid x$ ही विषम नैसर्गिक संख्या, $1 < x \leq 5\}$ हा संच यादीपद्धतीने कसा लिहिला जाईल?

(A) $\{1, 3, 5\}$ (B) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (C) $\{1, 3\}$ (D) $\{3, 5\}$

(iii) $P = \{1, 2, \ldots\ldots\ldots 10\}$, हा कोणत्या प्रकारचा संच आहे?

(A) रिक्त संच (B) अनंत संच (C) सांत संच (D) यांपैकी नाही

(iv) $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ आणि $M = \{1, 2, 4\}$ तर खालीलपैकी N हा संच कोणता?

(A) $\{1, 2, 3\}$ (B) $\{3, 4, 5, 6\}$ (C) $\{2, 5, 6\}$ (D) $\{4, 5, 6\}$

(v) जर $P \subseteq M$, तर $P \cap (P \cup M)$ हा खालीलपैकी कोणता संच आहे?

(A) P (B) M (C) $P \cup M$ (D) $P' \cap M$

(vi) खालीलपैकी कोणता संच रिक्त संच आहे?

(A) समांतर रेषांच्या छेदन बिंदूंचा संच (B) सम मूळसंख्यांचा संच

(C) 30 पेक्षा कमी दिवस असलेल्या इंग्रजी महिन्यांचा संच

(D) $P = \{x \mid x \in I, -1 < x < 1\}$

(2) खालील उपप्रश्नांसाठी अचूक पर्याय निवडा.

(i) खालीलपैकी कोणता समूह संच आहे?

(A) इंद्रधनुष्यातील रंग (B) शाळेच्या आवारातील उंच झाडे

(C) गावातील श्रीमंत लोक (D) पुस्तकातील सोपी उदाहरणे

(ii) $N \cap W$ हा संच खालीलपैकी कोणता?

(A) $\{1, 2, 3, ...\}$ (B) $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ (C) $\{0\}$ (D) $\{\ \}$

(iii) $P = \{x \mid x$ हे indian या शब्दातील अक्षर आहे$\}$ तर P हा संच यादी पद्धतीने खालीलपैकी कोणता ?

(A) {i, n, d} (B) {i, n, d, a} (C) {i, n, a} (D) {n, d, a}

(iv) जर $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ व $M = \{3, 4, 7, 8\}$ तर $T \cup M =$?

(A) {1, 2, 3, 4, 5, 7} (B) {1, 2, 3, 7, 8}

(C) {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8} (D) {3, 4}

(3) एका गटातील 100 लोकांपैकी 72 लोक इंग्रजी बोलतात आणि 43 लोक फ्रेंच बोलतात. हे 100 लोक इंग्रजी किंवा फ्रेंच यांपैकी किमान एक भाषा बोलतात, तर किती लोक फक्त इंग्रजी बोलतात? किती लोक फक्त फ्रेंच बोलतात? आणि किती लोक इंग्रजी आणि फ्रेंच या दोन्ही भाषा बोलतात?

(4) पार्थने वृक्षसंवर्धन सप्ताहात 70 झाडे लावली तर प्रज्ञाने 90 झाडे लावली. त्यांपैकी 25 झाडे दोघांनीही मिळून लावली, तर पार्थ किंवा प्रज्ञा यांनी एकूण किती झाडे लावली?

(5) जर $n(A) = 20$, $n(B) = 28$ व $n(A \cup B) = 36$ तर $n(A \cap B) =$?

(6) एका वर्गातील 28 विद्यार्थ्यांपैकी 8 विद्यार्थ्यांच्या घरी फक्त कुत्रा पाळला आहे, 6 विद्यार्थ्यांच्या घरी फक्त मांजर पाळले आहे. 10 विद्यार्थ्यांच्या घरी कुत्रा आणि मांजर दोन्हीही पाळले आहे तर किती विद्यार्थ्यांच्या घरी कुत्रा किंवा मांजर यांपैकी एकही प्राणी पाळलेला नाही?

(7) पुढील प्रत्येक उदाहरणातील संचांचा छेद संच वेन आकृतीच्या साहाय्याने दाखवा.

(i) A ={3, 4, 5, 7} B ={1, 4, 8}

(ii) P = {a, b, c, e, f} Q ={l, m, n , e, b}

(iii) X = $\{x \mid x$ ही 80 व 100 यांच्या दरम्यानची मूळसंख्या आहे $\}$

Y = $\{y \mid y$ ही 90 व 100 मधील विषम संख्या आहे $\}$

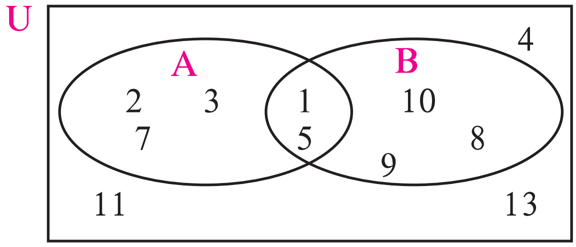
(8) खालीलपैकी कोणते संच कोणत्या संचांचे उपसंच आहे ते लिहा.

X = सर्व चौकोनांचा संच. Y = सर्व समभुज चौकोनांचा संच.

S = सर्व चौरसांचा संच. T = सर्व समांतरभुज चौकोनांचा संच.

V = सर्व आयतांचा संच.

(9) जर M हा कोणताही एक संच असेल, तर $M \cup \phi$ आणि $M \cap \phi$ लिहा.

(10*) 

शेजारील वेन आकृतीवरून U, A, B, $A \cup B$ आणि $A \cap B$ हे संच लिहा.

(11) जर $n(A) = 7$, $n(B) = 13$, $n(A \cap B) = 4$, तर $n(A \cup B) = ?$

कृती I : रिकाम्या जागी संचाचे घटक लिहा.

U = {1, 3, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15}

A = {1, 11, 13} B = {8, 5, 10, 11, 15} A′ = {........} B′ = {........}

$A \cap B$ = {...........} $A' \cap B'$ = {...............}

$A \cup B$ = {...........} $A' \cup B'$ = {...........}

$(A \cap B)'$ = {...........} $(A \cup B)'$ = {...........}

पडताळा घ्या : $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

कृती II : तुमच्या आसपासच्या 20 कुटुंबाकडून पुढील माहिती मिळवा.

(i) मराठी वर्तमानपत्रे घेणाऱ्या कुटुंबांची संख्या.

(ii) इंग्रजी वर्तमानपत्रे घेणाऱ्या कुटुंबांची संख्या.

(iii) इंग्रजी व मराठी या दोन्ही भाषांतील वर्तमानपत्रे घेणाऱ्या कुटुंबांची संख्या.

मिळवलेली माहिती वेन आकृतीने दाखवा.

2 वास्तव संख्या

चला, शिकूया.

- परिमेय संख्यांचे गुणधर्म
- अपरिमेय संख्यांचे गुणधर्म
- करणी
- वर्गकरणींची तुलना
- वर्गकरणींवरील क्रिया
- वर्गकरणींचे परिमेयीकरण

जरा आठवूया.

मागील इयत्तांमध्ये आपण नैसर्गिक संख्या, पूर्णांक संख्या आणि वास्तव संख्या यांचा अभ्यास केला आहे.

N = नैसर्गिक संख्यासंच = $\{1, 2, 3, 4, ...\}$

W = पूर्ण संख्यासंच = $\{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

I = पूर्णांक संख्यासंच = $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$

Q = परिमेय संख्यासंच = $\{\frac{p}{q}, | p, q \in I, q \neq 0\}$

R = वास्तव संख्यासंच.

$N \subseteq W \subseteq I \subseteq Q \subseteq R$.

परिमेय संख्यांमधील क्रमसंबंध : $\frac{p}{q}$ आणि $\frac{r}{s}$ या परिमेय संख्या असून $q > 0, s > 0$

(i) जर $p \times s = q \times r$ तर $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ (ii) जर $p \times s > q \times r$ तर $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$

(iii) जर $p \times s < q \times r$ तर $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$

जाणून घेऊया.

परिमेय संख्यांचे गुणधर्म (Properties of rational numbers)

a, b, c या परिमेय संख्या असतील तर

गुणधर्म	बेरीज	गुणाकार
1. क्रमनिरपेक्षता	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
2. साहचर्य	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. अविकारक	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \times 1 = 1 \times a = a$
4. व्यस्त	$a + (-a) = 0$	$a \times \frac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0)$

जरा आठवूया.

कोणत्याही परिमेय संख्येचे दशांश अपूर्णांकी रूप खंडित किंवा अखंड आवर्ती असते.

खंडित रूप	अखंड आवर्ती रूप
(1) $\frac{2}{5} = 0.4$	(1) $\frac{17}{36} = 0.472222\ldots = 0.47\dot{2}$
(2) $-\frac{7}{64} = -0.109375$	(2) $\frac{33}{26} = 1.2692307692307\ldots = 1.2\overline{692307}$
(3) $\frac{101}{8} = 12.625$	(3) $\frac{56}{37} = 1.513513513\ldots = 1.\overline{513}$

जाणून घेऊया.

अखंड आवर्ती दशांश रूपातील परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ या रूपात मांडणे.

उदा (1) 0.777.... हा आवर्ती दशांश अपूर्णांक $\frac{p}{q}$ रूपात लिहा.

उकल : समजा $x = 0.777\ldots = 0.\dot{7}$

$$\therefore 10x = 7.777\ldots = 7.\dot{7}$$

$$\therefore 10x - x = 7.\dot{7} - 0.\dot{7}$$

$$\therefore 9x = 7$$

$$\therefore x = \frac{7}{9}$$

$$\therefore 0.777\ldots = \frac{7}{9}$$

उदा (2) 7.529529529... हा आवर्ती दशांश अपूर्णांक $\frac{p}{q}$ रूपात लिहा.

उकल : समजा, $x = 7.529529\ldots = 7.\overline{529}$

$$\therefore 1000x = 7529.529529\ldots = 7529.\overline{529}$$

$$\therefore 1000x - x = 7529.\overline{529} - 7.\overline{529}$$

$$\therefore 999x = 7522.0 \qquad \therefore x = \frac{7522}{999}$$

$$\therefore 7.\overline{529} = \frac{7522}{999}$$

विचार करूया.

$2.4\dot{3}$ ही संख्या $\frac{p}{q}$ रूपात लिहिण्यासाठी काय कराल ?

हे लक्षात ठेवूया.

(1) दिलेल्या संख्येत दशांश चिन्हानंतर लगेच किती अंक आवर्ती आहेत हे पाहून त्याप्रमाणे त्या संख्येला 10, 100, 1000 यांपैकी योग्य संख्येने गुणावे. उदा. $2.\dot{3}$ या संख्येत 3 हा एकच अंक आवर्ती आहे. म्हणून $2.\dot{3}$ ही संख्या $\frac{p}{q}$ रूपात आणण्यासाठी तिला 10 ने गुणावे.

$1.\overline{24}$ या संख्येत 2, 4 हे दोन अंक आवर्ती आहेत. म्हणून $1.\overline{24}$ ला 100 ने गुणावे.

$1.\overline{513}$ या संख्येत 5, 1, 3 हे तीन अंक आवर्ती आहेत. म्हणून $1.\overline{513}$ ला 1000 ने गुणावे.

(2) परिमेय संख्येच्या छेदाचे मूळ अवयव तपासा. त्यांत 2 आणि 5 यांच्या व्यतिरिक्त मूळसंख्या नसतील तर त्या परमेय संख्येचे दशांश रूप खंडित असते. 2 व 5 व्यतिरिक्त मूळसंख्या ही छेदाचा अवयव असेल तर त्या संख्येचे दशांश रूप अखंड आवर्ती असते.

सरावसंच 2.1

1. खालीलपैकी कोणत्या परिमेय संख्यांचे दशांश रूप खंडित असेल आणि कोणत्या संख्येचे दशांश रूप अखंड आवर्ती असेल ते लिहा.

(i) $\frac{13}{5}$ (ii) $\frac{2}{11}$ (iii) $\frac{29}{16}$ (iv) $\frac{17}{125}$ (v) $\frac{11}{6}$

2. खालील परिमेय संख्या दशांश रूपात लिहा.

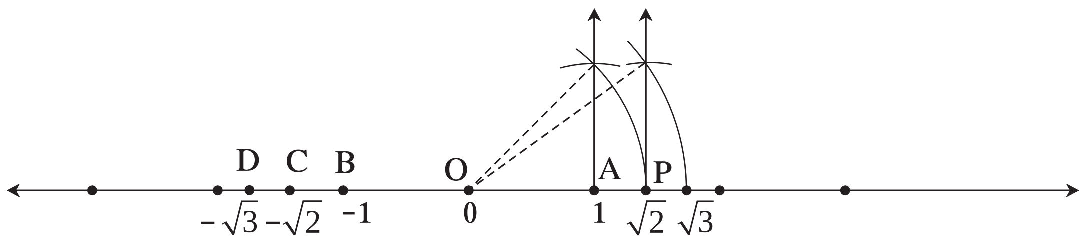
(i) $\frac{127}{200}$ (ii) $\frac{25}{99}$ (iii) $\frac{23}{7}$ (iv) $\frac{4}{5}$ (v) $\frac{17}{8}$

3. खालील परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ रूपात लिहा.

(i) $0.\dot{6}$ (ii) $0.\overline{37}$ (iii) $3.\overline{17}$ (iv) $15.\overline{89}$ (v) $2.\overline{514}$

जरा आठवूया.

खालील संख्यारेषेवर दाखवलेल्या $\sqrt{2}$ व $\sqrt{3}$ ह्या संख्या परिमेय नाहीत, म्हणजेच त्या अपरिमेय आहेत.



या संख्यारेषेवर OA = 1 एकक अंतर आहे. O च्या डावीकडे B बिंदूही 1 एकक अंतरावर आहे. B बिंदूचा निर्देशक −1 आहे. P बिंदूचा निर्देशक $\sqrt{2}$ असून त्याची विरुद्ध संख्या C या बिंदूने दर्शवली आहे. C बिंदूचा निर्देशक $-\sqrt{2}$ आहे. त्याप्रमाणे $\sqrt{3}$ ची विरुद्ध संख्या $-\sqrt{3}$ दर्शवणारा बिंदू D आहे.

जाणून घेऊया.

अपरिमेय आणि वास्तव संख्या (Irrational and real numbers)

$\sqrt{2}$ ही संख्या अपरिमेय आहे हे अप्रत्यक्ष सिद्धता देऊन सिद्ध करता येते.

$\sqrt{2}$ ही परिमेय संख्या आहे हे गृहीत धरू. ती $\frac{p}{q}$ मानू.

$\frac{p}{q}$ हे त्या परिमेय संख्येचे संक्षिप्त रूप आहे म्हणजेच p व q मध्ये 1 पेक्षा वेगळा सामाईक विभाजक नाही, असे मानू.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $\therefore$ $2 = \frac{P^2}{q^2}$ (दोन्ही बाजूंचा वर्ग करून)

$\therefore$ $2q^2 = p^2$

$\therefore$ p^2 ही समसंख्या आहे.

$\therefore$ p सुद्धा समसंख्या आहे, म्हणजेच 2 हा p चा विभाजक आहे. ....(I)

$\therefore$ $p = 2t$ $\therefore$ $p^2 = 4t^2$ $t \in I$

$\therefore$ $2q^2 = 4t^2$ ($\because$ $p^2 = 2q^2$) $\therefore$ $q^2 = 2t^2$ $\therefore$ q^2 ही सम संख्या आहे. $\therefore$ q ही सम संख्या आहे.

$\therefore$ 2 हा q चा सुद्धा विभाजक आहे. .... (II)

विधान (I) व (II) वरून 2 हा p आणि q यांचा सामाईक विभाजक आहे.

ही विसंगती आहे. कारण $\frac{p}{q}$ मध्ये p आणि q चा 1 व्यतिरिक्त एकही सामाईक विभाजक नाही.

$\therefore$ $\sqrt{2}$ ही परिमेय संख्या आहे हे गृहीत चुकीचे आहे. $\therefore$ $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.

याच पद्धतीने $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ या अपरिमेय संख्या आहेत हे दाखवता येते. त्यासाठी 3 किंवा 5 हा, n चा विभाजक असेल तरच तो n^2 चा ही विभाजक असतो या नियमाचा उपयोग करा.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ अशा संख्या, संख्यारेषेवर दाखवता येतात.

जी संख्या संख्यारेषेवर बिंदूने दाखवता येते, ती वास्तव संख्या आहे असे म्हणतात.

थोडक्यात, संख्यारेषेवरील प्रत्येक बिंदूचा निर्देशक ही वास्तव संख्या असते आणि प्रत्येक वास्तव संख्येशी निगडित असणारा बिंदू संख्यारेषेवर असतो.

आपल्याला माहीत आहे, की प्रत्येक परिमेय संख्या वास्तव संख्या असते. परंतु $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, π, $3+\sqrt{2}$ अशा वास्तव संख्या परिमेय नाहीत. म्हणून प्रत्येक वास्तव संख्या ही परिमेय असतेच असे नाही हे लक्षात ठेवा.

अपरिमेय संख्यांची दशांश रूपात मांडणी

आपण 2 व 3 या संख्यांची वर्गमुळे भागाकार पद्धतीने काढू.

2 चे वर्गमूळ

	1.41421...
1	2. $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$....
+1	-1
24	100
+4	-96
281	400
+ 1	-281
2824	11900
+ 4	-11296
28282	60400
+ 2	- 56564
282841	0383600

$\therefore \sqrt{2} = 1.41421...$

3 चे वर्गमूळ

	1.732....
1	3. $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$ $\overline{00}$....
+1	-1
27	200
+7	-189
343	1100
+ 3	-1029
3462	007100
+ 2	-6924
3464	0176

$\therefore \sqrt{3} = 1.732...$

येथे भागाकारातील दशांश चिन्हापुढील अंकांची संख्या कधीही संपत नाही. म्हणजेच अनंत अंकांचा क्रम मिळतो. हा क्रम काही अंकांच्या गटाच्या आवर्तनाने तयार होत नाही. म्हणून हे संख्येचे दशांशरूप अखंड अनावर्ती असते.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ या संख्या अपरिमेय संख्या आहेत. म्हणजेच 1.4142... आणि 1.732... यासुद्धा अपरिमेय संख्या आहेत. **यावरून लक्षात घ्या, की अखंड अनावर्ती दशांश रूपातील संख्या अपरिमेय असते.**

संख्या π

कृती I

जाड कार्डबोर्डवर वेगवेगळ्या त्रिज्यांची वर्तुळे काढा. तीन, चार वर्तुळाकृती चकत्या कापा. प्रत्येक चकतीच्या कडेवरून दोरा फिरवून प्रत्येक वर्तुळाकृती चकतीचा परीघ मोजा. खालील सारणी पूर्ण करा.

अ. क्र.	त्रिज्या	व्यास (d)	परीघ (c)	गुणोत्तर = $\frac{c}{d}$
1	7 सेमी			
2	8 सेमी			
3	5.5 सेमी			

शेजारील सारणीवरून $\frac{c}{d}$ हे गुणोत्तर प्रत्येक वेळी 3.1 च्या जवळपास येते. म्हणजे स्थिर असते हे लक्षात येईल. ते गुणोत्तर π या चिन्हाने दर्शवतात.

कृती II

π ची अंदाजे किंमत काढण्यासाठी 11 सेमी, 22 सेमी व 33 सेमी लांबीचे तारेचे तुकडे घ्या. प्रत्येक तारेपासून वर्तुळ तयार करा. त्या वर्तुळांचे व्यास मोजा व खालील सारणी पूर्ण करा.

वर्तुळ क्र.	परीघ	व्यास	परीघ व व्यास यांचे गुणोत्तर
1	11 सेमी		
2	22 सेमी		
3	33 सेमी		

परीघ व व्यास यांचे गुणोत्तर $\frac{22}{7}$ च्या जवळपास आले का याचा पडताळा घ्या.

वर्तुळाचा परीघ व व्यास यांचे गुणोत्तर ही स्थिर संख्या असते, ती अपरिमेय असते. ती संख्या π या चिन्हाने दर्शवली जाते. π ची अंदाजे किंमत $\frac{22}{7}$ किंवा 3.14 घेतात.

थोर भारतीय गणिती आर्यभट यांनी इ. स. 499 मध्ये π ची किंमत $\frac{62832}{20000} = 3.1416$ अशी काढली होती.

$\sqrt{3}$ ही अपरिमेय संख्या आहे हे आपण पाहिले आहे. आता $2 + \sqrt{3}$ ही संख्या अपरिमेय आहे का ते पाहू.

समजा, $2 + \sqrt{3}$ ही संख्या अपरिमेय नाही असे मानू. म्हणजेच ती परिमेय असायला हवी.

जर $2 + \sqrt{3}$ परिमेय असेल तर $2 + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ आहे असे मानू.

$\therefore\ \sqrt{3} = \frac{p}{q} - 2$ हे समीकरण मिळते.

येथे डावी बाजू अपरिमेय संख्या आणि उजवी बाजू परिमेय संख्या अशी विसंगती येते.

म्हणजेच $2 + \sqrt{3}$ ही परिमेय संख्या नसून ती अपरिमेय संख्या आहे, हे सिद्ध होते.

त्याचप्रमाणे $2\sqrt{3}$ अपरिमेय आहे हे दाखवता येते.

दोन अपरिमेय संख्याची बेरीज किंवा गुणाकार परिमेय असू शकतो हे पुढीलप्रमाणे पडताळता येते.

जसे, $2 + \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 2$, $\quad 4\sqrt{5} \div \sqrt{5} = 4$, $\quad (3 + \sqrt{5}) - (\sqrt{5}) = 3$,

$2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$ $\quad \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$, $\quad 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$

हे लक्षात ठेवूया.

अपरिमेय संख्यांचे गुणधर्म

(1) परिमेय संख्या व अपरिमेय संख्या यांची बेरीज किंवा वजाबाकी ही अपरिमेय संख्या असते.

(2) शून्येतर परिमेय संख्या व अपरिमेय संख्या यांचा गुणाकार किंवा भागाकार हीसुद्‌धा एक अपरिमेय संख्या असते.

(3) दोन अपरिमेय संख्यांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार हे मात्र परिमेय किंवा अपरिमेय असू शकतात.

जाणून घेऊया.

वास्तव संख्यांवरील क्रमसंबंधाचे गुणधर्म

1. जर a आणि b या दोन वास्तव संख्या असतील तर त्यांच्यामध्ये $a = b$ किंवा $a < b$ किंवा $a > b$ यांपैकी कोणता तरी एकच संबंध असतो.
2. जर $a < b$ आणि $b < c$ तर $a < c$
3. जर $a < b$ तर $a + c < b + c$
4. जर $a < b$ आणि जर $c > 0$ तर $ac < bc$ आणि जर $c < 0$ तर $ac > bc$

परिमेय व अपरिमेय संख्या घेऊन वरील नियम पडताळून पाहा.

ऋण संख्येचे वर्गमूळ

जर $\sqrt{a} = b$ तर $b^2 = a$ हे आपल्याला माहीत आहे.

यावरून जर $\sqrt{5} = x$ तर $x^2 = 5$ हे आपल्याला समजते.

तसेच आपल्याला हे माहीत आहे, की कोणत्याही वास्तव संख्येचा वर्ग ही नेहमी ऋणेतर संख्या येते. म्हणजे कोणत्याही वास्तव संख्येचा वर्ग कधीही ऋण नसतो. पण $(\sqrt{-5})^2 = -5$ $\therefore$ $\sqrt{-5}$ ही वास्तव संख्या नाही.

म्हणजेच ऋण वास्तव संख्येचे वर्गमूळ वास्तव संख्या नसते.

सरावसंच 2.2

(1) $4\sqrt{2}$ ही संख्या अपरिमेय आहे हे सिद्‌ध करा.

(2) $3 + \sqrt{5}$ ही संख्या अपरिमेय संख्या आहे हे सिद्‌ध करा.

(3) $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ या संख्या संख्यारेषेवर दाखवा.

(4) खाली दिलेल्या संख्यांच्या दरम्यानच्या कोणत्याही तीन परिमेय संख्या लिहा.

(i) 0.3 आणि −0.5 (ii) −2.3 आणि −2.33

(iii) 5.2 आणि 5.3 (iv) −4.5 आणि −4.6

जाणून घेऊया.

धन परिमेय संख्येचे मूळ (Root of positive rational number)

जर $x^2 = 2$ तर $x = \sqrt{2}$ किंवा $x = -\sqrt{2}$, असते. $\sqrt{2}$ आणि $-\sqrt{2}$ ह्या अपरिमेय संख्या आहेत हे आपल्याला माहीत आहे. $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{8}$, यांसारख्या संख्या सुद्‌धा अपरिमेय असतात.

n धन पूर्णांक संख्या असून व $x^n = a$ असेल, तर x हे a चे n वे मूळ आहे असे म्हणतात. हे मूळ परिमेय किंवा अपरिमेय असते.

उदा. $2^5 = 32$ $\therefore$ 2 हे 32 चे 5 वे मूळ परिमेय आहे, पण $x^5 = 2$ तर $x = \sqrt[5]{2}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.

करणी (Surds)

आपल्याला माहीत आहे की 5 ही परिमेय संख्या आहे परंतु $\sqrt{5}$ ही परिमेय नाही. ज्याप्रमाणे वास्तव संख्येचे वर्गमूळ किंवा घनमूळ परिमेय किंवा अपरिमेय असू शकते त्याचप्रमाणे n वे मूळ देखील परिमेय किंवा अपरिमेय असू शकते.

जर n ही 1 पेक्षा मोठी पूर्णांक संख्या असेल आणि a या धन वास्तव संख्येचे n वे मूळ x ने दाखवले तर $x^n = a$ किंवा $\sqrt[n]{a} = x$ असे लिहितात.

जर a ही धन **परिमेय संख्या असेल आणि a चे n वे मूळ x ही अपरिमेय संख्या असेल तर x ही करणी (अपरिमेय मूळ) आहे असे म्हणतात.**

$\sqrt[n]{a}$ ही करणी संख्या असेल तर $\sqrt{\ }$ या चिन्हाला **करणी चिन्ह** (radical sign) म्हणतात. n या संख्येला त्या **करणीची कोटी** (order of the surd) म्हणतात आणि a ला करणीस्थ संख्या (radicand) असे म्हणतात.

(1) समजा $a = 7$, $n = 3$, तर $\sqrt[3]{7}$ ही करणी आहे. कारण $\sqrt[3]{7}$ ही अपरिमेय आहे.

(2) समजा $a = 27$ आणि $n = 3$ असेल तर $\sqrt[3]{27} = 3$ ही अपरिमेय संख्या नाही म्हणून $\sqrt[3]{27}$ ही करणी नाही.

(3) $\sqrt[3]{8}$ ही करणी आहे का?

समजा $\sqrt[3]{8} = p$ $\quad$ $p^3 = 8$. $\quad$ कोणत्या संख्येचा घन 8 आहे?

आपल्याला माहीत आहे की, 2 या संख्येचा घन 8 आहे.

$\sqrt[3]{8}$ मध्ये $a = 8$ ही परिमेय संख्या आहे. येथे $n = 3$ ही धन पूर्णांक संख्या आहे. परंतु $\sqrt[3]{8}$ ही संख्या अपरिमेय नाही कारण 8 चे घनमूळ 2 आहे. $\therefore$ $\sqrt[3]{8}$ ही करणी नाही.

(4) आता $\sqrt[4]{8}$ चा विचार करू,

येथे $a = 8$, करणीची कोटी $n = 4$; परंतु 8 ही संख्या कोणत्याही परिमेय संख्येचा चौथा घात नाही.

म्हणजे $\sqrt[4]{8}$ ही अपरिमेय संख्या आहे. $\therefore$ $\sqrt[4]{8}$ ही करणी आहे.

आपण फक्त कोटी 2 असणाऱ्या म्हणजे $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{42}$ इत्यादी करणींचा विचार करणार आहोत.

कोटी 2 असणाऱ्या करणींना **वर्ग करणी** म्हणतात.

करणीचे सोपे रूप

कधी कधी करणी संख्यांना सोपे रूप देता येते. जसे (i) $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

(ii) $\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ....अशा काही करणी सोप्या रूपातील करणी आहेत. त्यांना आणखी सोपे रूप देता येत नाही.

सजातीय करणी (Similar or like surds)

$\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$, $\frac{4}{5}\sqrt{2}$ या काही सजातीय करणी आहेत. जर p आणि q या परिमेय संख्या असतील तर $p\sqrt{a}$, $q\sqrt{a}$ या सजातीय करणी आहेत असे म्हणतात. **दोन करणी सजातीय असण्यासाठी त्यांची कोटी समान असावी लागते. तसेच करणीस्थ संख्याही समान असाव्या लागतात.**

$\sqrt{45}$ व $\sqrt{80}$ या करणींची कोटी 2 आहे, म्हणजे यांची कोटी समान आहे, परंतु करणीस्थ संख्या समान नाहीत. म्हणून या करणी सजातीय नाहीत असे दिसते. या करणींना सोपे रूप देऊ.

$\sqrt{45} = \sqrt{9\times5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ आणि $\sqrt{80} = \sqrt{16\times5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$3\sqrt{5}$ व $4\sqrt{5}$ या करणी सजातीय आहेत

म्हणजे $\sqrt{45}$ व $\sqrt{80}$ या करणींची सोपी रूपे सजातीय करणी आहेत.

हे लक्षात ठेवूया.

सोप्या रूपातील करणींची कोटी व करणीस्थ संख्या समान होत असतील तर त्या करणींना सजातीय करणी म्हणतात.

जाणून घेऊया.

करणींची तुलना (Comparison of surds)

समजा a, b, k या धनवास्तव संख्या असल्या तर

$a < b$ यावरून $ak < bk$ मिळते. $\therefore a^2 < ab < b^2$

म्हणजे $a < b$ तर $a^2 < b^2$

उलट $a^2 < b^2$ असेल तर $a = b$, $a > b$ आणि $a < b$ या शक्यता पाहू.

$a = b$ वरून $a^2 = b^2$, $a > b$ वरून $a^2 > b^2$ मिळते परंतु हे अशक्य

$\therefore a < b$ मिळते. म्हणजे $a^2 < b^2$ तर $a < b$

येथे a आणि b या वास्तव संख्या असल्याने त्या परिमेय संख्या किंवा करणी असू शकतात.

याचा उपयोग करून दोन करणींमधील लहान-मोठेपणा तपासू.

(i) $6\sqrt{2}$, $5\sqrt{5}$

$\sqrt{36} \times \sqrt{2}$ [?] $\sqrt{25} \times \sqrt{5}$

$\sqrt{72}$ [?] $\sqrt{125}$

परंतु 72 [<] 125

$\therefore 6\sqrt{2}$ [<] $5\sqrt{5}$

किंवा

$(6\sqrt{2})^2$ [ ] $(5\sqrt{5})^2$,

$72 < 125$

$\therefore 6\sqrt{2}$ [<] $5\sqrt{5}$

(ii) $8\sqrt{3}$, $\sqrt{192}$

$\sqrt{64} \times \sqrt{3}$ [?] $\sqrt{192}$

$\sqrt{192}$ [?] $\sqrt{192}$

परंतु 192 [=] 192

$\therefore \sqrt{192}$ [=] $\sqrt{192}$

$\therefore 8\sqrt{3}$ [=] $\sqrt{192}$

(iii) $7\sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$

$\sqrt{49} \times \sqrt{2}$ [?] $\sqrt{25} \times \sqrt{3}$

$\sqrt{98}$ [?] $\sqrt{75}$

परंतु 98 [>] 75

$\therefore 7\sqrt{2}$ [>] $5\sqrt{3}$

किंवा

$(7\sqrt{2})^2$ [ ] $(5\sqrt{3})^2$,

$98 > 75$

$\therefore 7\sqrt{2}$ [>] $5\sqrt{3}$

सजातीय करणींवरील क्रिया (Operations on like surds)

सजातीय करणींवर बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार या क्रिया करता येतात.

उदा (1) सोपे रूप द्या : $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3}$

उकल : $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3} = (7 + 29)\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

उदा (2) सोपे रूप द्या : $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3}$

उकल : $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = (7 - 29)\sqrt{3} = -22\sqrt{3}$

विचार करूया.

$\sqrt{9+16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9}+\sqrt{16}$

$\sqrt{100+36} \stackrel{?}{=} \sqrt{100}+\sqrt{36}$

उदा (3) सोपे रूप द्या : $13\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8}$

उकल : $13\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8} = \left(13 + \frac{1}{2} - 5\right)\sqrt{8} = \left(\frac{26+1-10}{2}\right)\sqrt{8}$

$= \frac{17}{2}\sqrt{8} = \frac{17}{2}\sqrt{4\times 2}$

$= \frac{17}{2} \times 2\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$

उदा (4) सोपे रूप द्या : $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125}$

उकल : $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125} = 8\sqrt{5} + \sqrt{4\times 5} - \sqrt{25\times 5}$

$= 8\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$

$= (8 + 2 - 5)\sqrt{5}$

$= 5\sqrt{5}$

उदा (5) करणींचा गुणाकार करा : $\sqrt{7} \times \sqrt{42}$

उकल : $\sqrt{7} \times \sqrt{42} = \sqrt{7\times 42} = \sqrt{7\times 7\times 6} = 7\sqrt{6}$ ($7\sqrt{6}$ ही अपरिमेय संख्या आहे.)

उदा (6) करणींचा भागाकार करा : $\sqrt{125} \div \sqrt{5}$

उकल : $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5$ (5 ही परिमेय संख्या आहे.)

उदा (7) $\sqrt{50} \times \sqrt{18} = \sqrt{25\times 2} \times \sqrt{9\times 2} = 5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 15 \times 2 = 30$

दोन करणींचा गुणाकार किंवा भागाकार ही परिमेय संख्या असू शकते, हे वरील उदाहरणांवरून लक्षात घ्या.

करणीचे परिमेयीकरण (Rationalization of surd)

दोन करणींचा गुणाकार परिमेय संख्या येत असेल तर त्यांपैकी कोणत्याही एका करणीस दुसऱ्या करणीचा **परिमेयीकरण गुणक** (Rationalizing Factor) म्हणतात.

उदा (1) $\sqrt{2}$ या करणीला $\sqrt{2}$ ने गुणले असता $\sqrt{2\times2}$ = $\sqrt{4}$ मिळतात. $\sqrt{4}$ = 2 ही परिमेय संख्या आहे.

$\therefore$ $\sqrt{2}$ चा परिमेयीकरण गुणक $\sqrt{2}$ आहे.

उदा (2) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ हा गुणाकार करा.

$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ ही परिमेय संख्या आहे.

$\therefore$ $\sqrt{2}$ चा $\sqrt{8}$ हा परिमेयीकरणाचा गुणक आहे.

त्याप्रमाणे तर $8\sqrt{2}$ ही करणीसुद्धा $\sqrt{2}$ या करणीचा परिमेयीकरण गुणक आहे.

कारण $\sqrt{2} \times 8\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 8 \times 2 = 16$.

$\sqrt{6}$, $\sqrt{16}$ $\sqrt{50}$ हे $\sqrt{2}$ चे परिमेयीकरण गुणक आहेत का हे पडताळा.

हे लक्षात ठेवूया.

दिलेल्या करणीचा परिमेयीकरण गुणक एकमेव नसतो. एखादी करणी दिलेल्या करणीचा परिमेयीकरण गुणक असेल तर तिला शून्येतर परिमेय संख्येने गुणून येणारी करणीसुद्धा दिलेल्या करणीचा परिमेयीकरण गुणक असते.

उदा (3) $\sqrt{27}$ चा परिमेयीकरण गुणक लिहा.

उकल : $\sqrt{27} = \sqrt{9\times3} = 3\sqrt{3}$ $\therefore$ $3\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \times 3 = 9$ ही परिमेय संख्या आहे.

$\therefore$ $\sqrt{3}$ हा $\sqrt{27}$ या करणीचा परिमेयीकरण गुणक आहे.

लक्षात घ्या की, $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ म्हणजे $3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 9 \times 3 = 27$.

म्हणजे $\sqrt{27}$ या दिलेल्या करणीचा $3\sqrt{3}$ हा सुद्धा परिमेयीकरण गुणक असेल. या व्यतिरिक्त $4\sqrt{3}$, $7\sqrt{3}$ असे अनेक गुणक मिळतील. यांपैकी $\sqrt{3}$ हा सर्वांत सोप्या मांडणीतील परिमेयीकरण गुणक आहे.

उदा (4) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ च्या छेदाचे परिमेयीकरण करा.

उकल : $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ....अंशाला व छेदाला $\sqrt{5}$ ने गुणू.

उदा (5) $\frac{3}{2\sqrt{7}}$ च्या छेदाचे परिमेयीकरण करा.

उकल : $\frac{3}{2\sqrt{7}} = \frac{3}{2\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{2\times7} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$ (येथे $2\sqrt{7}$ ला $\sqrt{7}$ ने गुणणे पुरेसे आहे.)

हे लक्षात ठेवूया.

छेदाचे परिमेयीकरण करण्यासाठी परिमेयीकरण गुणकाचा उपयोग होतो.

कोणत्याही संख्येचा छेद परिमेय संख्या असणे सोईचे असते म्हणून छेदांचे परिमेयीकरण करतात.

सरावसंच 2.3

(1) पुढील करणींच्या कोटी सांगा.

(i) $\sqrt[3]{7}$ (ii) $5\sqrt{12}$ (iii) $\sqrt[4]{10}$ (iv) $\sqrt{39}$ (v) $\sqrt[3]{18}$

(2) पुढीलपैकी कोणत्या संख्या करणी आहेत हे सांगा.

(i) $\sqrt[3]{51}$ (ii) $\sqrt[4]{16}$ (iii) $\sqrt[5]{81}$ (iv) $\sqrt{256}$ (v) $\sqrt[3]{64}$ (vi) $\sqrt{\frac{22}{7}}$

(3) खालील जोड्यांपैकी कोणत्या करणींच्या जोड्या सजातीय व कोणत्या विजातीय आहेत हे ओळखा.

(i) $\sqrt{52}$, $5\sqrt{13}$ (ii) $\sqrt{68}$, $5\sqrt{3}$ (iii) $4\sqrt{18}$, $7\sqrt{2}$

(iv) $19\sqrt{12}$, $6\sqrt{3}$ (v) $5\sqrt{22}$, $7\sqrt{33}$ (vi) $5\sqrt{5}$, $\sqrt{75}$

(4) खालील करणींना सोपे रूप द्या.

(i) $\sqrt{27}$ (ii) $\sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{250}$ (iv) $\sqrt{112}$ (v) $\sqrt{168}$

(5) खालील संख्यांमधील लहानमोठेपणा ठरवा.

(i) $7\sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{247}$, $\sqrt{274}$ (iii) $2\sqrt{7}$, $\sqrt{28}$

(iv) $5\sqrt{5}$, $7\sqrt{2}$ (v) $4\sqrt{42}$, $9\sqrt{2}$ (vi) $5\sqrt{3}$, 9 (vii) 7, $2\sqrt{5}$

(6) सोपे रूप द्या.

(i) $5\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$ (ii) $9\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{125}$

(iii) $7\sqrt{48} - \sqrt{27} - \sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{7} - \frac{3}{5}\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$

(7) गुणाकार करा आणि तो सोप्या रूपात लिहा.

(i) $3\sqrt{12} \times \sqrt{18}$ (ii) $3\sqrt{12} \times 7\sqrt{15}$

(iii) $3\sqrt{8} \times \sqrt{5}$ (iv) $5\sqrt{8} \times 2\sqrt{8}$

(8) भागाकार करा आणि तो सोप्या रूपात लिहा.

(i) $\sqrt{98} \div \sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{125} \div \sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{54} \div \sqrt{27}$ (iv) $\sqrt{310} \div \sqrt{5}$

(9) छेदाचे परिमेयीकरण करा.

(i) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{14}}$ (iii) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ (iv) $\frac{6}{9\sqrt{3}}$ (v) $\frac{11}{\sqrt{3}}$

जरा आठवूया.

आपल्याला हे माहीत आहे, की

जर $a > 0$, $b > 0$ तर $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; $(\sqrt{a})^2 = a$; $\sqrt{a^2} = a$

गुणाकार करा.

उदा (1) $\sqrt{2}(\sqrt{8} + \sqrt{18})$

$= \sqrt{2\times8} + \sqrt{2\times18}$

$= \sqrt{16} + \sqrt{36}$

$= 4 + 6$

$= 10$

उदा (2) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$

$= \sqrt{3}\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)$

$= \sqrt{3}\times2\sqrt{3} - \sqrt{3}\times3\sqrt{2} - \sqrt{2}\times2\sqrt{3} + \sqrt{2}\times3\sqrt{2}$

$= 2\times3 - 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 3\times2$

$= 6 - 5\sqrt{6} + 6$

$= 12 - 5\sqrt{6}$

जाणून घेऊया.

वर्ग करणीचे द्विपद रूप (Binomial quadratic surd)

- $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; $\frac{3}{4} + \sqrt{5}$ ही वर्ग करणीची द्विपद रूपे आहेत; तसेच $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; $\frac{3}{4} - \sqrt{5}$ ही सुद्धा करणींची द्विपद रूपे आहेत.

खालील गुणाकार अभ्यासा.

- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$
- $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$
- $(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2 = 3 - 7 = -4$
- $(\frac{3}{2} + \sqrt{5})(\frac{3}{2} - \sqrt{5}) = (\frac{3}{2})^2 - (\sqrt{5})^2 = \frac{9}{4} - 5 = \frac{9-20}{4} = -\frac{11}{4}$

$(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ व $(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ या द्विपद करणींच्या जोडीचा गुणाकार परिमेय संख्या आहे. अशा द्विपद करणींच्या जोड्यांना **अनुबद्‌ध जोड्या** म्हणतात.

द्विपद करणी व तिची अनुबद्‌ध जोडी या दोन्ही संख्या परस्परांचे परिमेयीकरणाचे गुणक असतात.

$\sqrt{5} - \sqrt{3}$ किंवा $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ यांपैकी प्रत्येक द्विपद करणी ही $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ या द्विपद करणीची अनुबद्‌ध जोडी आहे.

तसेच $7 + \sqrt{3}$ ची अनुबद्‌ध जोडी $7 - \sqrt{3}$ आहे.

हे लक्षात ठेवूया.

द्विपद करणींच्या अनुबद्ध जोडीतील पदांचा गुणाकार नेहमी परिमेय संख्या येतो.

जाणून घेऊया.

छेदाचे परिमेयीकरण (Rationalization of the denominator)

द्विपद करणी व तिची अनुबद्ध जोडी यांचा गुणाकार परिमेय असतो, या गुणधर्माचा उपयोग करून, छेद द्विपद करणी असणाऱ्या संख्यांच्या छेदांचे परिमेयीकरण करता येते.

उदा.(1) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ या संख्येच्या छेदाचे परिमेयीकरण करा.

उकल : $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ या द्विपद करणींची अनुबद्ध जोडी $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ आहे

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

उदा (2) $\frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ या संख्येच्या छेदाचे परिमेयीकरण करा.

उकल : $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$ या द्विपद करणीचीअनुबद्ध जोडी $3\sqrt{2} - \sqrt{5}$ आहे.

$$\frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{8(3\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{8\times 3\sqrt{2} - 8\sqrt{5}}{9\times 2 - 5} = \frac{24\sqrt{2} - 8\sqrt{5}}{18 - 5} = \frac{24\sqrt{2} - 8\sqrt{5}}{13}$$

सरावसंच 2.4

(1) गुणाकार करा

(i) $\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$ (ii) $(\sqrt{5}-\sqrt{7})\sqrt{2}$ (iii) $(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(4\sqrt{3}-\sqrt{2})$

(2) खालील संख्यांच्या छेदांचे परिमेयीकरण करा.

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{3}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{4}{7+4\sqrt{3}}$ (iv) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

जाणून घेऊया.

केवलमूल्य (Absolute value)

x ही वास्तव संख्या असेल तर x चे केवलमूल्य (Absolute Value) किंवा संख्या रेषेवरील शून्यापासूनचे तिचे अंतर $|x|$ असे लिहितात. $|x|$ चे वाचन x चे केवलमूल्य असे करतात.

केवलमूल्याची व्याख्या पुढीलप्रमाणे करतात.

जर $x > 0$ तर $|x| = x$ — जर x धन असेल तर x चे केवलमूल्य x असते.

जर $x = 0$ तर $|x| = 0$ — जर x शून्य असेल तर x चे केवलमूल्य शून्यच असते.

जर $x < 0$ तर $|x| = -x$ — जर x ऋण असेल तर x चे केवलमूल्य x च्या विरुद्ध संख्येएवढे असते.

उदा (1) $|3| = 3$ $\quad |-3| = -(-3) = 3 \quad |0| = 0$

कोणत्याही वास्तवसंख्येचे केवलमूल्य ऋण नसते.

उदा (2) खालील किंमत काढा.

(i) $|9-5| = |4| = 4$ $\quad$ (ii) $|8-13| = |-5| = 5$

(iii) $|8| - |-3| = 5$ $\quad$ (iv) $|8| \times |4| = 8 \times 4 = 32$

उदा (3) सोडवा $|x-5| = 2$

उकल : $|x-5| = 2$

$\therefore x - 5 = +2$ किंवा $x - 5 = -2$

$\therefore x = 2 + 5$ किंवा $x = -2+5$

$\therefore x = 7$ किंवा $x = 3$

सरावसंच 2.5

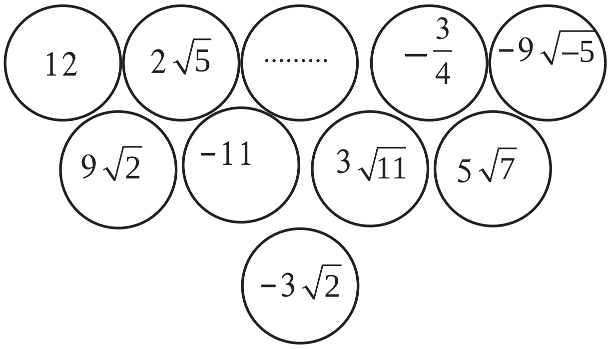
(1) किंमत काढा.

i) $|15 - 2|$ $\quad$ (ii) $|4 - 9|$ $\quad$ (iii) $|7| \times |-4|$

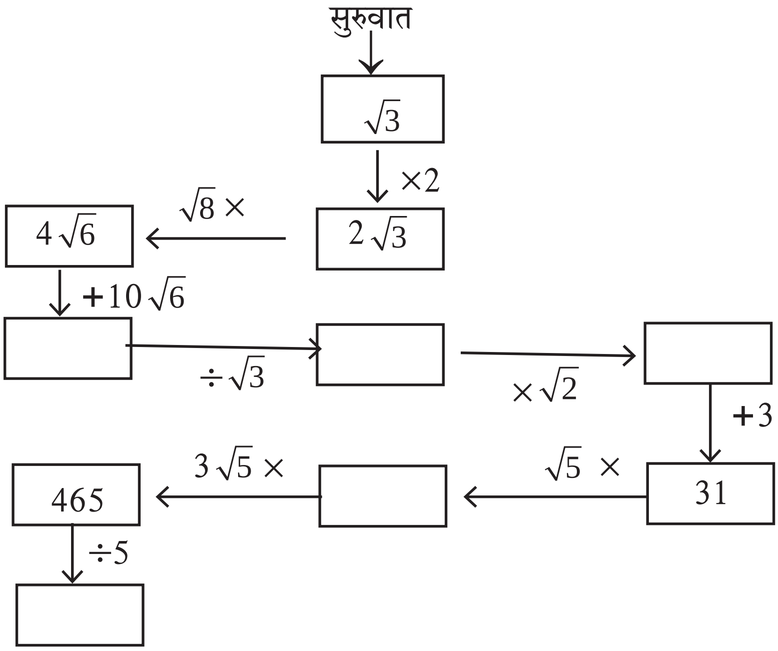
(2) सोडवा

(i) $|3x-5| = 1$ $\quad$ (ii) $|7-2x| = 5$ $\quad$ (iii) $\left|\frac{8-x}{2}\right| = 5$ $\quad$ (iv) $\left|5+\frac{x}{4}\right| = 5$

कृती (I) : शेजारील कार्डांवर काही वास्तवसंख्या लिहिल्या आहेत. त्यांचा उपयोग करून बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकाराची दोन दोन उदाहरणे तयार करा व सोडवा.



कृती (II) :



संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

(1) खालील प्रश्नांच्या बहुपर्यायी उत्तरांपैकी योग्य पर्याय निवडा

(i) खालीलपैकी अपरिमेय संख्या कोणती ?

(A) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $\frac{3}{9}$ (D) $\sqrt{196}$

(ii) खालीलपैकी अपरिमेय संख्या कोणती ?

(A) 0.17 (B) $1.\overline{513}$ (C) $0.27\overline{46}$ (D) 0.101001000.....

(iii) खालीलपैकी कोणत्या संख्येचे दशांशरूप अखंड आवर्ती असेल ?

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{3}{11}$ (D) $\frac{137}{25}$

(iv) संख्या रेषेवरील प्रत्येक बिंदू काय दर्शवितो ?

(A) नैसर्गिक संख्या (B) अपरिमेय संख्या (C) परिमेय संख्या (D) वास्तव संख्या.

(v) $0.\dot{4}$ या संख्येचे परिमेय रुप कोणते ?

(A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{40}{9}$ (C) $\frac{3.6}{9}$ (D) $\frac{36}{9}$

(vi) जर n ही पूर्ण वर्ग संख्या नसेल तर $\sqrt{n}$ ही खालीलपैकी कोणती संख्या असेल ?

(A) नैसर्गिक संख्या (B) परिमेय संख्या

(C) अपरिमेय संख्या (D) A, B, C हे तिन्ही पर्याय असू शकतात.

(vii) खालीलपैकी कोणती संख्या करणी नाही ?

(A) $\sqrt{7}$ (B) $\sqrt[3]{17}$ (C) $\sqrt[3]{64}$ (D) $\sqrt{193}$

(viii) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$ या करणीची कोटी किती ?

(A) 3 (B) 2 (C) 6 (D) 5

(ix) $2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ या द्विपद करणीची अनुबद्ध जोडी कोणती ?

(A) $-2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{3}+2\sqrt{5}$

(x) $\left|12-(13+7)\times 4\right|$ ची किंमत किती ?

(A) −68 (B) 68 (C) −32 (D) 32.

(2) खालील संख्या $\frac{p}{q}$ रूपात लिहा.

(i) 0.555 (ii) $29.\overline{568}$ (iii) 9.315 315 ..... (iv) 357.417417..... (v) $30.\overline{219}$

(3) खालील संख्या दशांश रूपात लिहा.

(i) $\frac{-5}{7}$ (ii) $\frac{9}{11}$ (iii) $\sqrt{5}$ (iv) $\frac{121}{13}$ (v) $\frac{29}{8}$

(4) $5+\sqrt{7}$ ही संख्या अपरिमेय आहे हे दाखवा.

(5) खालील करणी सोप्या रूपात लिहा.

(i) $\frac{3}{4}\sqrt{8}$ (ii) $-\frac{5}{9}\sqrt{45}$

(6) खालील करणींचा सोपा परिमेयीकरण गुणक लिहा.

(i) $\sqrt{32}$ (ii) $\sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{27}$ (iv) $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ (v) $3\sqrt{72}$ (vi) $4\sqrt{11}$

(7) सोपे रूप द्या.

(i) $\frac{4}{7}\sqrt{147}+\frac{3}{8}\sqrt{192}-\frac{1}{5}\sqrt{75}$ (ii) $5\sqrt{3}+2\sqrt{27}+\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) $\sqrt{216}-5\sqrt{6}+\sqrt{294}-\frac{3}{\sqrt{6}}$

(iv) $4\sqrt{12}-\sqrt{75}-7\sqrt{48}$ (v*) $2\sqrt{48}-\sqrt{75}-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(8) छेदाचे परिमेयीकरण करा.

(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2}{3\sqrt{7}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$ (v) $\frac{12}{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

3 बहुपदी

चला, शिकूया.

- **बहुपदीची ओळख**
- **बहुपदींवरील क्रिया**
- **बहुपदीची कोटी**
- **संश्लेषक भागाकार**
- **बहुपदीची किंमत**
- **शेषसिद्धांत**

चला, चर्चा करूया.

$p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$; $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\,m^5$; 6 या सर्व बैजिक राशी आहेत.

शिक्षक : विद्यार्थी मित्रांनो, $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\,m^5$, 6 या प्रत्येक राशीतील एकेक पद घ्या. त्या पदातील चलांचे घातांक सांगा.

माधुरी : $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$ या राशीतील पदांच्या चलांचे घातांक अनुक्रमे 3, 2, 1 आहेत.

विवेक : सर, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\,m^5$ या राशीतील पदांच्या चलांचे घातांक अनुक्रमे 2, 3, 5 आहेत.

रोहित : सर, 6 या राशीमध्ये चल नाही. येथे $6 = 6 \times 1 = 6 \times x^0$ असे लिहिता येते, म्हणून 6 या राशीतील चलाचा घातांक 0 आहे.

शिक्षक : म्हणजे वरील सर्व राशींमध्ये चलांचे घातांक धनपूर्णांक किंवा शून्य, म्हणजेच पूर्ण संख्या आहेत.

ज्या बैजिक राशीमध्ये चलांचे घातांक पूर्ण संख्या असतात, त्या राशीला **बहुपदी** (polynomial) असे म्हणतात. 6 ही सुद्धा बहुपदी आहे. 6, -7, $\frac{1}{2}$, 0, $\sqrt{3}$ इत्यादी स्थिर संख्यांना **स्थिर बहुपदी** (Constant polynomial) म्हणतात.

$\sqrt{y} + 5$ व $\frac{1}{y} - 3$ या बहुपदी आहेत काय ?

सारा : सर, $\sqrt{y} + 5$ ही बहुपदी नाही. कारण $\sqrt{y} + 5 = y^{\frac{1}{2}} + 5$, यामध्ये y चा घातांक $\frac{1}{2}$ असून ती पूर्ण संख्या नाही.

जॉन : सर, $\frac{1}{y} - 3$ ही सुद्धा बहुपदी नाही. कारण $\frac{1}{y} - 3 = y^{-1} - 3$, येथे y चा घातांक -1 असून ती पूर्ण संख्या नाही.

शिक्षक : बहुपदी नसलेल्या कोणत्याही पाच बैजिक राशी लिहून त्या बहुपदी का नाहीत याचे स्पष्टीकरण द्या.

खालील प्रश्नांची उत्तरे वेगवेगळी उदाहरणे घेऊन व त्यांवर चर्चा करून शोधा.

- प्रत्येक बैजिक राशी ही बहुपदी असते काय ?
- प्रत्येक बहुपदी ही बैजिक राशी असते काय ?

बहुपदीचे प्रकार (पदांच्या संख्येवरून)

- $2x$, 5 → प्रत्येक बहुपदीत एकच पद → एकपदी
- $x^4 + x$, $m^2 - 3m$ → प्रत्येक बहुपदीत दोन पदे → द्विपदी
- $\frac{1}{2}y^2 - 2y + 5$, $x^3 - \sqrt{3}\, x^2 + 5x$ → प्रत्येक बहुपदीत तीन पदे → त्रिपदी

एका चलातील बहुपदी तिच्यातील चलानुसार $p(x)$, $q(m)$, $r(y)$ अशा प्रकारे दर्शवतात.

उदाहरणार्थ $p(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 3 \quad q(m) = m^2 + \frac{1}{2}m - 7 \quad r(y) = y^2 + 5$

जाणून घेऊया.

एका चलातील बहुपदीची कोटी (Degree of a polynomial in one variable)

शिक्षक : $2x^7 - 5x + 9$ या बहुपदीतील चलाचा सर्वांत मोठा घातांक कोणता आहे ?

जिजा : सर, सर्वांत मोठा घातांक 7 आहे.

शिक्षक : एका चलातील बहुपदीमध्ये, चलाच्या सर्वांत मोठ्या घातांकास त्या **बहुपदीची कोटी** म्हणतात. मग सांगा बरं, वरील बहुपदीची कोटी किती ?

अशोक : सर, $2x^7 - 5x + 9$ या बहुपदीची कोटी 7 आहे.

शिक्षक : 10 या बहुपदीची कोटी किती ?

राधा : $10 = 10 \times 1 = 10 \times x^0$ म्हणून 10 या बहुपदीची कोटी 0 आहे.

शिक्षक : 10 प्रमाणेच **कोणत्याही शून्येतर स्थिर बहुपदीची कोटी 0 असते.**
शून्य बहुपदीची कोटी निश्चित करता येत नाही.

एकापेक्षा अधिक चलांतील बहुपदीची कोटी

बहुपदीमधील प्रत्येक पदामध्ये असलेल्या चलांच्या घातांकांची जी बेरीज सर्वाधिक असते, त्या बेरजेस त्या **बहुपदीची कोटी** म्हणतात.

उदा. $3m^3n^6 + 7m^2n^3 - mn$ ही दोन चलांतील बहुपदी आहे. या बहुपदीची कोटी 9 आहे.
(येथे घातांकांच्या बेरजा $3 + 6 = 9$, $2 + 3 = 5$, $1 + 1 = 2$)

कृती I : चल x व कोटी 5 असलेल्या एकपदी, द्विपदी व त्रिपदीचे प्रत्येकी एक उदाहरण लिहा.

एकपदी ☐ द्विपदी ☐ त्रिपदी ☐

कृती II : 5 कोटी असलेल्या दोन चलांतील एका द्विपदीचे उदाहरण तयार करा. ☐

बहुपदीचे प्रकार (कोटीवरून)

एका चलातील बहुपदी

$3x - 1$, $7y$	$2y^2 + y + 1$, $-3x^2$	$x^3 + x^2 + 2x + \sqrt{3}$, $m - m^3$
कोटी 1	कोटी 2	कोटी 3
रेषीय बहुपदी	वर्ग बहुपदी	घन बहुपदी
सामान्यरूप $ax + b$ येथे a व b सहगुणक व $a \neq 0$	सामान्यरूप $ax^2 + bx + c$ येथे a, b, c सहगुणक व $a \neq 0$	सामान्यरूप $ax^3 + bx^2 + cx + d$ येथे a, b, c, d सहगुणक व $a \neq 0$

बहुपदी : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ही x या चलातील कोटी n असलेली बहुपदी आहे. येथे a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 हे सहगुणक असून $a_n \neq 0$

बहुपदीचे प्रमाणरूप, सहगुणक रूप व घातांक रूप
(Standard form, coefficient form and index form of a polynomial)

$p(x) = x - 3x^2 + 5 + x^4$ ही बहुपदी x च्या घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने $x^4 - 3x^2 + x + 5$ अशी लिहिता येईल. या बहुपदीत x च्या तिसऱ्या घाताचे पद नाही. म्हणजेच ते $0x^3$ आहे असे मानता येते. हे पद घेऊन $p(x)$ ही बहुपदी $x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5$ अशी लिहिता येईल. अशा प्रकारे घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने लिहिलेल्या बहुपदीला प्रमाण रूपातील बहुपदी म्हणतात.

काही वेळा प्रमाणरूपातील बहुपदी मधले चल अध्याहृत मानून तिचे फक्त सहगुणक क्रमाने लिहितात, उदाहरणार्थ $x^3 - 3x^2 + 0x - 8$ ही बहुपदी (1, -3, 0, -8) अशी लिहितात. याला बहुपदीचे सहगुणक रूप असे म्हणतात.

(4, 0, -5, 0, 1) ही बहुपदी y हे चल वापरून $4y^4 + 0y^3 - 5y^2 + 0y + 1$ म्हणजेच $4y^4 - 5y^2 + 1$ अशी लिहिता येईल. या रूपाला बहुपदीचे घातांक रूप म्हणतात.

बहुपदीचे सहगुणकरूप व प्रमाणरूप

उदा. $p(m) = 3m^5 - 7m + 5m^3 + 2$

बहुपदी घातांकाच्या उतरत्या क्रमाने लिहा.	$3m^5 + 5m^3 - 7m + 2$
बहुपदीत नसलेली पदे शून्य सहगुणक घेऊन समाविष्ट करा आणि ती प्रमाणरूपात लिहा.	$3m^5 + 0m^4 + 5m^3 + 0m^2 - 7m + 2$
दिलेल्या बहुपदीचे सहगुणक रूप लिहा.	(3, 0, 5, 0, − 7, 2)
बहुपदीची कोटी लिहा.	5

उदा (1) $x^3 + 3x - 5$ ही बहुपदी सहगुणक रूपात लिहा.

उकल : $x^3 + 3x - 5 = x^3 + 0x^2 + 3x - 5$

$\therefore$ दिलेल्या बहुपदीचे सहगुणक रूप (1, 0, 3, − 5)

उदा (2) (2, − 1, 0, 5, 6) ही सहगुणक रूपातील बहुपदी घातांक रूपात लिहा.

उकल : बहुपदीचे सहगुणक रूप (2, − 1, 0, 5, 6)

$\therefore$ घातांक रूपातील बहुपदी $= 2x^4 - x^3 + 0x^2 + 5x + 6$

म्हणजेच $2x^4 - x^3 + 5x + 6$

सरावसंच 3.1

1. खालील राशी बहुपदी आहेत का ते लिहा. स्पष्टीकरण द्या.

(i) $y + \frac{1}{y}$ (ii) $2 - 5\sqrt{x}$ (iii) $x^2 + 7x + 9$

(iv) $2m^{-2} + 7m - 5$ (v) 10

2. खालील प्रत्येक बहुपदीतील m^3 चा सहगुणक लिहा.

(i) m^3 (ii) $\frac{-3}{2} + m - \sqrt{3}m^3$ (iii) $\frac{-2}{3}m^3 - 5m^2 + 7m - 1$

3. खालील माहितीवरून x हे चल वापरून प्रत्येकी एक बहुपदी लिहा.

(i) कोटी 7 असलेली एकपदी (ii) कोटी 35 असलेली द्विपदी (iii) कोटी 8 असलेली त्रिपदी

4. खालील प्रत्येक बहुपदीची कोटी लिहा.

(i) $\sqrt{5}$ (ii) x° (iii) x^2 (iv) $\sqrt{2}\,m^{10} - 7$ (v) $2p - \sqrt{7}$

(vi) $7y - y^3 + y^5$ (vii) $xyz + xy - z$ (viii) $m^3n^7 - 3m^5n + mn$

5. खालील बहुपदींचे रेषीय, वर्ग व घन बहुपदी याप्रकारे वर्गीकरण करा.

(i) $2x^2 + 3x + 1$ (ii) $5p$ (iii) $\sqrt{2}\ y - \frac{1}{2}$

(iv) $m^3 + 7m^2 + \frac{5}{2}m - \sqrt{7}$ (v) a^2 (vi) $3r^3$

6. खालील बहुपदी प्रमाण रूपात लिहा.

(i) $m^3 + 3 + 5m$ (ii) $-7y + y^5 + 3y^3 - \frac{1}{2} + 2y^4 - y^2$

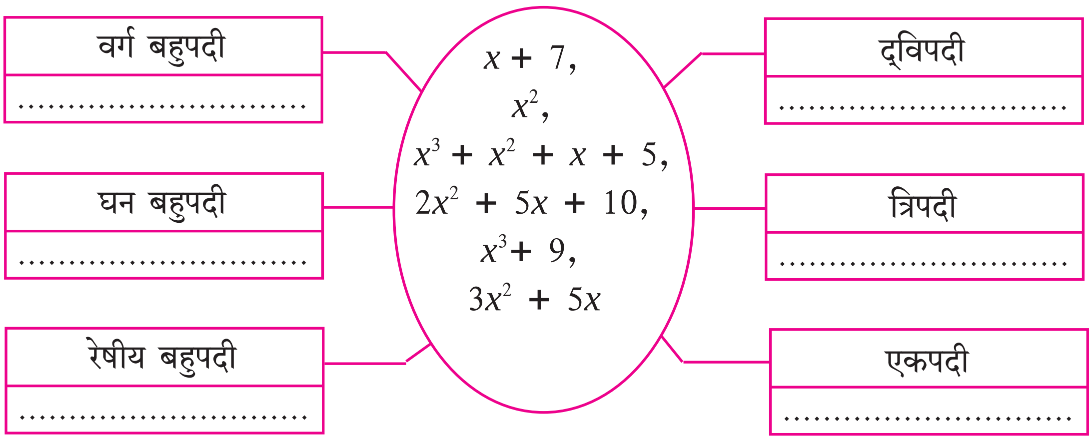
7. खालील बहुपदी सहगुणक रूपात लिहा.

(i) $x^3 - 2$ (ii) $5y$ (iii) $2m^4 - 3m^2 + 7$ (iv) $-\frac{2}{3}$

8. खालील सहगुणक रूपातील बहुपदी x चल वापरून घातांकरूपात लिहा.

(i) (1, 2, 3) (ii) (5, 0, 0, 0, − 1) (iii) (− 2, 2, − 2, 2)

9. खाली काही बहुपदी दिल्या आहेत. त्या बहुपदी दिलेल्या चौकटींत योग्य ठिकाणी लिहा.



जरा आठवूया.

(1) दोन सरूप बैजिक पदांची बेरीज किंवा वजाबाकी करताना त्यांच्या सहगुणकांची बेरीज किंवा वजाबाकी करतात. जसे, $5m^3 - 7m^3 = (5 - 7)m^3 = -2m^3$

(2) दोन बैजिक पदांचा गुणाकार किंवा भागाकार करताना त्यांच्या सहगुणकांचा गुणाकार किंवा भागाकार होतो. तसेच घातांकांच्या नियमांचाही उपयोग होतो.

जसे, $-4y^3 \times 2y^2z = -8y^5z$; $12a^2b \div 3ab^2 = \frac{4a}{b}$

जाणून घेऊया.

बहुपदींवरील क्रिया

बहुपदींची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार या क्रिया बैजिक राशींवरील क्रियांप्रमाणेच करतात.

उदा (1) $7a^2 + 5a + 6$ मधून $5a^2 - 2a$ वजा करा.

उकल : $(7a^2 + 5a + 6) - (5a^2 - 2a)$

$$= 7a^2 + 5a + 6 - 5a^2 + 2a$$

$$= \underline{7a^2 - 5a^2} + \underline{5a + 2a} + 6$$

$$= 2a^2 + 7a + 6$$

उदा (2) $-2a \times 5a^2 = -10a^3$

उदा (3) $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2) = ?$

उकल : $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2)$

$$= m^2(m^3 + 2m - 2) - 5(m^3 + 2m - 2)$$

$$= m^5 + 2m^3 - 2m^2 - 5m^3 - 10m + 10$$

(पहिल्या बहुपदीतील प्रत्येक पदाने दुसऱ्या बहुपदीस गुणले.)

$$= m^5 + 2m^3 - 5m^3 - 2m^2 - 10m + 10$$ (सरूप पदांची एकत्र मांडणी केली.)

$$= m^5 - 3m^3 - 2m^2 - 10m + 10$$

गुणाकाराची कोटी 5 आहे हे लक्षात ठेवूया.

उदा (4) $3m^2n + 5mn^2 - 7mn$ आणि $2m^2n - mn^2 + mn$ यांची बेरीज करा.

उकल : $(3m^2n + 5mn^2 - 7mn) + (2m^2n - mn^2 + mn)$

$$= 3m^2n + 5mn^2 - 7mn + 2m^2n - mn^2 + mn$$

$$= \underline{3m^2n + 2m^2n} + \underline{5mn^2 - mn^2} - \underline{7mn + mn}$$ (सरूप पदांची एकत्र मांडणी केली.)

$$= 5m^2n + 4mn^2 - 6mn$$ (सरूप पदांची बेरीज केली.)

विचार करूया.

एका बहुपदीची कोटी 3 व दुसऱ्या बहुपदीची कोटी 5 असेल तर बहुपदींच्या गुणाकाराची कोटी किती असेल?

गुण्य व गुणक बहुपदींच्या कोटी आणि त्यांच्या गुणाकाराची कोटी यांच्यामध्ये कोणता संबंध असतो ?

उदा (5) $(2 + 2x^2) \div (x + 2)$ हा भागाकार करा आणि भाज्य = भाजक × भागाकार + बाकी या स्वरूपात उत्तर लिहा.

उकल : प्रथम $p(x) = 2 + 2x^2$ ही भाज्य बहुपदी प्रमाण रूपात लिहू

$\therefore \ 2 + 2x^2 = 2x^2 + 0x + 2$

रीत I :

$$\begin{array}{r|l} & 2x - 4 \\ \hline x + 2 & 2x^2 + 0x + 2 \\ - & 2x^2 + 4x \\ & \underline{- \quad -} \\ & -4x + 2 \\ - & -4x - 8 \\ & \underline{+ \quad +} \\ & 10 \end{array}$$

भाज्य = भाजक × भागाकार + बाकी

$2 + 2x^2 = (x + 2) \times (2x - 4) + 10$

$q(x)$, भाजक = $(x + 2)$

$s(x)$, भागाकार = $2x - 4$ व $r(x)$, बाकी = 10

$\therefore \ p(x) = q(x) \times s(x) + r(x)$.

रीत II : भागाकाराची रेषीय पद्धती

$(2x^2 + 2) \div (x + 2)$ हा भागाकार करा.

$2x^2$ हे पद मिळवण्यासाठी $(x + 2)$ ला $2x$ ने गुणून $4x$ वजा करू.

$2x(x+2) - 4x = 2x^2$

$\therefore$ भाज्य = $2x^2 + 2 = 2x(x+2) - 4x + 2$ ...(I)

आता $-4x$ हे पद मिळवण्यासाठी $(x+2)$ ला -4 ने गुणू व 8 मिळवू.

$-4(x+2) + 8 = -4x$

$\therefore \ (2x^2 + 2) = 2x(x+2) - 4(x+2) + 8 + 2$ ...(I) वरून

$\therefore \ (2x^2 + 2) = (x + 2)(2x - 4) + 10$

भाज्य = भाजक × भागाकार + बाकी.

हे लक्षात ठेवूया.

युक्लिडचा भागाकार सिद्धांत

जर $s(x)$ आणि $p(x)$ या दोन बहुपदी असतील आणि $s(x)$ ची कोटी $p(x)$ च्या कोटीएवढी किंवा त्यापेक्षा जास्त असेल, आणि $s(x)$ ला $p(x)$ ने भागून येणारा भागाकार $q(x)$ असेल, तर $s(x) = p(x)\,q(x)+r(x)$. येथे $r(x) = 0$ किंवा $r(x)$ ची कोटी $p(x)$ च्या कोटीपेक्षा कमी असते.

सरावसंच 3.2

(1) दिलेली अक्षरे वापरून उत्तरे लिहा.

(i) लाट गावात a झाडे आहेत. झाडांची संख्या दरवर्षी b ने वाढते, तर x वर्षांनंतर त्या गावात किती झाडे असतील?

(ii) कवायतीसाठी एका रांगेत y मुले अशा x रांगा केल्या. तर कवायतीसाठी एकूण किती मुले हजर होती?

(iii) एका दोन अंकी संख्येच्या एकक व दशक स्थानचा अंक अनुक्रमे m व n आहे, तर ती दोन अंकी संख्या दर्शवणारी बहुपदी कोणती?

(2) खालील बहुपदींची बेरीज करा.

(i) $x^3 - 2x^2 - 9$; $5x^3 + 2x + 9$

(ii) $-7m^4 + 5m^3 + \sqrt{2}$; $5m^4 - 3m^3 + 2m^2 + 3m - 6$

(iii) $2y^2 + 7y + 5$; $3y + 9$; $3y^2 - 4y - 3$

(3) पहिल्या बहुपदीतून दुसरी बहुपदी वजा करा.

(i) $x^2 - 9x + \sqrt{3}$; $-19x + \sqrt{3} + 7x^2$

(ii) $2ab^2 + 3a^2b - 4ab$; $3ab - 8ab^2 + 2a^2b$

(4) खालील बहुपदींचा गुणाकार करा.

(i) $2x$; $x^2 - 2x - 1$ (ii) $x^5 - 1$; $x^3 + 2x^2 + 2$ (iii) $2y + 1$; $y^2 - 2y^3 + 3y$

(5) पहिल्या बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने भागा व उत्तर 'भाज्य = भाजक × भागाकार + बाकी' या रूपात लिहा.

(i) $x^3 - 64$; $x - 4$ (ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2$; $x^2 - x$

(6*) खालील माहिती पदावलीच्या रूपात लिहा. पदावलीला सोपे रूप द्या.

एका आयताकृती शेताची लांबी $(2a^2 + 3b^2)$ मीटर आणि रुंदी $(a^2 + b^2)$ मीटर आहे. शेतकऱ्याने शेतामध्ये $(a^2 - b^2)$ मीटर बाजू असलेल्या चौरसाकृती जागेवर घर बांधले, तर उरलेल्या शेताचे क्षेत्रफळ किती?

कृती : खालील उतारा वाचा व चौकटीत योग्य राशी लिहा व चर्चा करा.

शिरळस गावी कोरडवाहू शेती करणाऱ्या गोविंदचे 5 एकर शेत आहे. त्याच्या घरी पत्नी, 2 मुले व त्याची वृद्ध आई आहे. त्याने शेतीसाठी बँकेचे सव्वा लाख रुपये कर्ज, द.सा.द.शे. 10 या दराने घेतले. त्याने शेतातील x एकर जमिनीत सोयाबीन आणि y एकर जमिनीत कापूस व तूर यांचे पीक घेतले. शेतीसाठी आलेला खर्च पुढीलप्रमाणे आहे.

बियाणांसाठी त्याने एकूण रु.10,000 दिले. सोयाबीन पिकासाठी खते व कीटकनाशके यांसाठी 2000 x रुपये आणि मजुरी व मशागत यांसाठी 4000 x^2 रुपये खर्च झाला. कापूस व तूर या पिकांसाठी खते व कीटकनाशके यांचा खर्च 8000 y रुपये आणि मजुरी व मशागत यांसाठी 9000 y^2 रुपये खर्च झाला.

शेतीसाठी एकूण खर्च किती आला ते x आणि y वापरून लिहू.

[ ] + [$2000\ x$] + [$4000\ x^2$] + [$8000\ y$] + [ ] रुपये

त्याच्या शेतात सोयाबीनचे उत्पन्न 5 x^2 क्विंटल निघाले. ते 2800 रु. प्रतिक्विंटल प्रमाणे विकले गेले.
कापसाचे उत्पन्न $\frac{5}{3}y^2$ क्विंटल निघाले व ते 5000 रु. प्रतिक्विंटलप्रमाणे विकले गेले.
तुरीचे उत्पन्न $4y$ क्विंटल निघाले व ते 4000 रु. प्रतिक्विंटलप्रमाणे विकले.
सर्व शेतमालाची विक्री झाल्यावर त्यातून किती रुपये एकूण उत्पन्न आले.
ते x आणि y च्या पदावली रूपात लिहू.

[ ] + [ ] + [ ] रुपये

जाणून घेऊया.

संश्लेषक भागाकार पद्धती (Synthetic Division)

एका बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने कसे भागायचे हे आपल्याला माहीत आहे. आता आपण भाजक $x + a$ किंवा $x - a$ बहुपदी असेल तर भागाकाराची सोपी पद्धत समजून घेऊ.

उदा (1) $(3x^3 + 2x^2 - 1)$ या बहुपदीला $(x + 2)$ ने भागा.

उकल : प्रथम भाज्य बहुपदी प्रमाण रूपात लिहून नंतर ती सहगुणक रूपात लिहू.

भाज्याचे प्रमाणरूप : $3x^3 + 2x^2 - 1 = 3x^3 + 2x^2 + 0\,x - 1$

$\therefore$ भाज्य बहुपदीचे सहगुणक रूप $= (3, 2, 0, -1)$

भाजक बहुपदी $= x + 2$

खालील पायऱ्यांनी संश्लेषक पद्धतीने भागाकार करू.

(1) बाजूला दाखवल्याप्रमाणे एक उभी व एक आडवी अशा दोन रेषा काढू.

	....	पहिली ओळ
	....	दुसरी ओळ
	....	तिसरी ओळ

(2) भाजक $x + 2$ असून 2 ची विरुद्ध संख्या -2 आहे. $\therefore$ पहिल्या ओळीत उभ्या रेषेच्या डावीकडे -2 लिहू.आडव्या रेषेच्या वर पहिल्या ओळीत भाज्य बहुपदीचे सहगुणक रूप लिहू.

- 2	3	2	0	- 1	पहिली ओळ
	3				तिसरी ओळ

(3) आडव्या रेषेच्या खाली म्हणजे तिसऱ्या ओळीत भाज्यातील पहिला सहगुणक तसाच लिहू.

(4) तिसऱ्या ओळीतील 3 व भाजकातील -2 यांचा गुणाकार-6. हा दुसऱ्या ओळीतील 2 या सहगुणकाखाली लिहू. नंतर 2 आणि -6 यांची बेरीज -4 ही तिसऱ्या ओळीत खाली लिहू.

- 2	3	2	0	- 1	
		-6	8	-16	
	3	- 4	8	- 17	बाकी

याप्रमाणे गुणाकार व बेरजा करून; शेवटची बेरीज करून आलेली संख्या ही भागाकारातील बाकी असते. येथे बाकी $- 17$ आहे.

$(3, - 4, 8)$ हे भागाकाराचे सहगुणक रूप होय.

$\therefore$ भागाकार $= 3x^2 - 4x + 8$ व बाकी $= - 17$

$\therefore\ 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$

या पद्धतीला **भागाकाराची संश्लेषक पद्धत** म्हणतात.

हा भागाकार रेषीय पद्धतीने पुढीलप्रमाणे करता येईल.

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x^2 - 1 &= 3x^2 (x + 2) - 6x^2 + 2x^2 - 1 \\ &= 3x^2 (x + 2) - 4x^2 - 1 \\ &= 3x^2 (x + 2) - 4x^2 - 8x + 8x - 1 \\ &= 3x^2 (x + 2) - 4x (x + 2) + 8x - 1 \\ &= 3x^2 (x + 2) - 4x (x + 2) + 8x + 16 - 16 - 1 \\ &= 3x^2 (x + 2) - 4x (x + 2) + 8 (x + 2) - 17 \end{aligned}$$

$\therefore\ 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x + 2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$

उदा (2) $(2y^4 - 3y^3 + 5y - 4) \div (y - 1)$ हा भागाकार करा.

उकल : संश्लेषक पद्धत : भाज्य $= 2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^4 - 3y^3 + 0y^2 + 5y - 4$

भाजक $= y - 1$ $\quad -1$ ची विरुद्ध संख्या 1 आहे.

1	2	-3	0	5	-4	
		2	-1	-1	4	
	2	-1	-1	4	0	बाकी

भागाकाराचे सहगुणक रूप $(2, -1, -1, 4)$ आहे.

$\therefore$ भागाकार $= 2y^3 - y^2 - y + 4$ व बाकी $= 0$

रेषीय पद्धत : $2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^3(y - 1) + 2y^3 - 3y^3 + 5y - 4$

$$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y^2 + 5y - 4$$

$$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4y - 4$$

$$= (2y^3 - y^2 - y + 4)(y - 1)$$

हे लक्षात ठेवूया.

संश्लेषक पद्धतीने भागाकार करताना फक्त $x + a$ किंवा $x - a$ या रूपातील ज्या बहुपदीची कोटी 1 आहे असेच भाजक घेतले आहेत.

सरावसंच 3.3

1. खालील भागाकार संश्लेषक पद्धतीने आणि रेषीय पद्धतीने करा. भागाकार आणि बाकी लिहा.

(i) $(2m^2 - 3m + 10) \div (m - 5)$ (ii) $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \div (x + 2)$

(iii) $(y^3 - 216) \div (y - 6)$ (iv) $(2x^4 + 3x^3 + 4x - 2x^2) \div (x + 3)$

(v) $(x^4 - 3x^2 - 8) \div (x + 4)$ (vi) $(y^3 - 3y^2 + 5y - 1) \div (y - 1)$

जाणून घेऊया.

बहुपदीची किंमत (Value of polynomial)

बहुपदीतील चलाला एखादी किंमत दिली की त्या बहुपदीचीही एक किंमत मिळते. उदाहरणार्थ, $x + 7$ या बहुपदीत x ला 2 ही किंमत दिली, तर त्या बहुपदीची 9 ही किंमत मिळते.

$p(x)$ या बहुपदीत x ला a ही किंमत देऊन येणारी बहुपदीची किंमत $p(a)$ ने दर्शवतात.

उदा (1) $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ या बहुपदींची किंमत $x = 2$ असताना काढा.

बहुपदी $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$

या बहुपदीमध्ये $x = 2$ ठेवून,

$$\therefore p(2) = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 5$$
$$= 2 \times 4 - 6 + 5$$
$$= 8 - 6 + 5$$
$$\therefore p(2) = 7$$

उदा (2) $y = -2$ असताना बहुपदी $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$ ची किंमत काढा.

उकल : $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$

$$\therefore p(-2) = 2 \times (-2)^3 - 2 \times (-2) + \sqrt{7}$$
$$= 2 \times (-8) - 2 \times (-2) + \sqrt{7}$$
$$= -16 + 4 + \sqrt{7}$$
$$= -12 + \sqrt{7}$$

$\therefore$ $y = -2$ असताना बहुपदीची किंमत $-12 + \sqrt{7}$ आहे.

उदा (3) $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$ या बहुपदीकरिता $p(0)$ काढा.

उकल : $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$

$$\therefore p(0) = 2 \times 0^2 - 0^3 + 0 + 2$$
$$= 2 \times 0 - 0 + 0 + 2$$
$$= 2$$

उदा (4) जर $m^2 - am + 7$ या बहुपदीची किंमत $m = -1$ असताना 10 असेल, तर a ची किंमत काढा.

उकल : $p(m) = m^2 - am + 7$

$$\therefore p(-1) = (-1)^2 - a \times (-1) + 7$$
$$= 1 + a + 7$$
$$= 8 + a$$

परंतु $p(-1) = 10$ (दिलेले आहे.)

$$\therefore 8 + a = 10$$
$$\therefore a = 10 - 8$$
$$\therefore a = 2$$

सरावसंच 3.4

(1) $x = 0$ असताना $x^2 - 5x + 5$ या बहुपदीची किंमत काढा.

(2) जर $p(y) = y^2 - 3\sqrt{2}y + 1$ तर $p(3\sqrt{2})$ काढा.

(3) जर $p(m) = m^3 + 2m^2 - m + 10$ तर $p(a) + p(-a) = ?$

(4) जर $p(y) = 2y^3 - 6y^2 - 5y + 7$ तर $p(2)$ काढा.

हे लक्षात ठेवूया.

चलाच्या एखाद्या किमतीसाठी बहुपदीची किंमत काढताना **प्रत्येक पदात** x च्या जागी दिलेली किंमत भरून त्या राशीची किंमत काढायची असते.

जाणून घेऊया.

शेष सिद्धांत (Remainder Theorem)

$p(x)$ या बहुपदीला $(x + a)$ ने भागल्यास उरणारी बाकी आणि या बहुपदीत x ला $-a$ ही किंमत देऊन येणारी त्या बहुपदीची किंमत यांचा परस्पर संबंध असतो. हा संबंध जाणण्यासाठी खालील उदाहरण अभ्यासा.

उदा. $p(x) = (4x^2 - x + 2)$ ला $(x + 1)$ ने भागा.

[येथे $(x + a)$ म्हणजे $(x + 1)$ आहे हे लक्षात ठेवूया.]

उकल : भाज्य बहुपदी $= 4x^2 - x + 2$

भाजक बहुपदी $= x + 1$

$$\begin{array}{r l}
\text{भागाकार} & 4x - 5 \\
\text{भाजक } x + 1 \,\big) & 4x^2 - x + 2 \quad \text{भाज्य} \\
- & 4x^2 + 4x \\
 & \;\;-\quad\; - \\
\hline
 & -5x + 2 \\
- & -5x - 5 \\
 & \;\;+\quad\; + \\
\hline
 & 7 \quad \text{बाकी}
\end{array}$$

भागाकार $= 4x - 5$ व बाकी $= 7$ .... (I)

हेच उदाहरण संश्लेषक भागाकार पद्धतीने करू.

$p(x)$ चे सहगुणक रूप $= (4, -1, 2)$

भाजक बहुपदी $= x + 1$

1 ची विरुद्ध संख्या -1

$$\begin{array}{r|rrr}
-1 & 4 & -1 & 2 \\
 & & -4 & 5 \\
\hline
 & 4 & -5 & \boxed{7} \ \text{बाकी}
\end{array}$$

भागाकार $= 4x - 5$ बाकी $= 7$

आता आपण बाकी आणि भाज्य बहुपदीची किंमत यांमधील संबंध बघू.

भाज्य बहुपदीची म्हणजे $4x^2 - x + 2$ या बहुपदीची $x = -1$ असताना किंमत काढू.

$p(x) = 4x^2 - x + 2$

$\therefore\ p(-1) = 4 \times (-1)^2 - (-1) + 2$

$= 4 \times 1 + 1 + 2$

$= 4 + 1 + 2$

$= 7$

$\therefore$ $x = -1$ असताना बहुपदी $p(x)$ ची किंमत 7 आहे. ...... (II)

म्हणून विधान (I) व (II) वरून, $p(x) = 4x^2 - x + 2$ या बहुपदीला $(x + a)$ ने म्हणजेच येथे $x + 1$ ने भागून मिळणारी बाकी आणि $x = -1$ असताना $p(x)$ या बहुपदीची किंमत म्हणजेच $p(-1)$ समान आहेत.

यावरून पुढील गुणधर्म लक्षात येतो.

$p(x)$ या बहुपदीला $(x + a)$ ने भागल्यास उरणारी **बाकी** ही $p(-a)$ एवढी,
म्हणजेच $p(x)$ मध्ये $x = -a$ मांडून येणाऱ्या **बहुपदींच्या किमतीएवढी** असते.

('शेष' या शब्दाचा अर्थ 'बाकी' असा आहे.)

या गुणधर्माला **शेष सिद्धांत** म्हणतात.

युक्लिडचा भागाकाराचा नियम वापरून हा गुणधर्म सिद्ध करू.

$p(x)$ ला $(x + a)$ ने भागल्यास

$p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$ [$q(x)$ = भागाकार, $r(x)$ = बाकी]

जर, $r(x) \neq 0$, तर नियमाप्रमाणे $r(x)$ ची कोटी 1 पेक्षा कमी म्हणजे 0 आहे. म्हणून $r(x)$ ही वास्तव संख्या आहे.

$\therefore$ $r(-a)$ ही सुद्‌धा वास्तव संख्या आहे.

आता, $p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$ ....(1)

यामध्ये $x = -a$ किंमत घेऊन

$p(-a) = q(-a) \times (a - a) + r(-a)$

$= q(-a) \times 0 + r(-a)$.........(2)

$\therefore$ $p(-a) = r(-a)$ ....(1) आणि (2) वरून

कृती : खालील उदाहरणांचा पडताळा घ्या.

(1) $p(x) = 3x^2 + x + 7$ या बहुपदीस $x + 2$ या बहुपदीने भागा आणि बाकी काढा.

(2) $x = -2$ असताना $p(x) = 3x^2 + x + 7$ या बहुपदीची किंमत काढा.

(3) आता भागाकारात मिळालेली बाकी ही $p(-2)$ ची किंमत आहे का ?

आणखी एक उदाहरण घेऊन वरीलप्रमाणे पडताळा घ्या.

उदा (1) $x^4 - 5x^2 - 4x$ या बहुपदीस $x + 3$ ने भागल्यास येणारी बाकी काढा.

उकल : **शेष सिद्धांताने**

भाज्य बहुपदी $p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

भाजक $= x + 3$

$\therefore \quad x = -3$ घेऊ.

$\therefore \quad p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

$p(-3) = (-3)^4 - 5(-3)^2 - 4(-3)$

$= 81 - 45 + 12$

$p(-3) = 48$

संश्लेषक भागाकार पद्धतीने

प्रमाण रूप $x^4 + 0x^3 - 5x^2 - 4x + 0$

सहगुणक रूप $= (1, 0, -5, -4, 0)$

-3	1	0	-5	-4	0	
		-3	9	-12	48	
	1	-3	4	-16	48	बाकी

बाकी $= 48$

उदा (2) शेष सिद्धांताचा उपयोग करून $x^3 - 2x^2 - 4x - 1$ या बहुपदीस $x - 1$ ने भागल्यास येणारी बाकी काढा.

उकल : $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$

भाजक $= x - 1 \quad \therefore \quad x = 1$ घेऊ.

$\therefore$ शेष सिद्धांतानुसार बाकी $= p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1$

$= 1 - 2 \times 1 - 4 - 1$

$p(1) = 1 - 2 - 4 - 1 = -6$

$\therefore$ शेषसिद्धांतानुसार बाकी $= -6$

उदा (3) जर $t^3 - 3t^2 + kt + 50$ या बहुपदीस $(t-3)$ ने भागल्यावर बाकी 62 उरत असेल, तर k ची किंमत काढा.

उकल : दिलेल्या बहुपदीला $(t-3)$ ने भागल्यावर बाकी 62 उरते हे दिले आहे. म्हणून दिलेल्या भाज्य बहुपदीची किंमत $t = 3$ असताना काढू.

$p(t) = t^3 - 3t^2 + kt + 50$

$\therefore$ शेष सिद्धांतानुसार

बाकी $= p(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + k \times 3 + 50$

$= 27 - 3 \times 9 + 3k + 50$

$= 27 - 27 + 3k + 50$

$= 3k + 50$

परंतु बाकी 62 दिली आहे.

$\therefore 3k + 50 = 62$

$\therefore 3k = 62 - 50$

$\therefore 3k = 12$

$\therefore k = \frac{12}{3}$

$\therefore k = 4$

हे लक्षात ठेवूया.

शेष सिद्धांत : $p(x)$ ही कोणतीही बहुपदी असून 'a' ही वास्तव संख्या असेल आणि जर $p(x)$ ला $(x + a)$ ने भागले तर येणारी बाकी ही $p(-a)$ एवढी असते.

$p(x) = s(x)\,(x - a) + r(x)$ $\qquad$ $r(x)$ ची कोटी < 1 किंवा $r(x) = 0$

या समीकरणात $x = a$ घालून $p(a) = 0 + r\,(a) = r\,(a)$ मिळते.

$\therefore$ $r(a)$ ची कोटी $= 0$ किंवा $r(a) = 0$ म्हणजेच $(x - a)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे असे लक्षात येते.

जाणून घेऊया.

अवयव सिद्धांत (Factor Theorem)

जर 21 ला 7 ने भागले तर बाकी 0 येते. म्हणून आपण 7 हा 21 चा अवयव आहे असे म्हणतो.

त्याचप्रमाणे दिलेल्या बहुपदीला भाजक बहुपदीने भागल्यास बाकी 0 आली तर ती बहुपदी दिलेल्या बहुपदीचा अवयव आहे असे म्हणतात.

उदा (1) $p(x) = (x^3 + 4x - 5)$ या बहुपदीस $(x - 1)$ ने भागल्यास येणारी बाकी काढा. $(x - 1)$ हा $p(x)$चा अवयव आहे का हे ठरवा.

उकल : $p(x) = x^3 + 4x - 5$

$p(1) = (1)^3 + 4(1) - 5$

$= 1 + 4 - 5$

$= 0$

येथे, शेष सिद्धांतानुसार बाकी $= 0$

$\therefore$ $(x - 1)$ हा $p(x)$ या बहुपदीचा अवयव आहे.

उदा (2) $p(x) = x^3 + 4x - 5$ या बहुपदीला $x + 2$ ने भागल्यास येणारी बाकी काढा. $(x + 2)$ हा $p(x)$चा अवयव आहे का हे ठरवा.

उकल : $p(x) = x^3 + 4x - 5$

$p(-2) = (-2)^3 + 4(-2) - 5$

$p(-2) = -8 - 8 - 5$

$= -21$

शेष सिद्धांतानुसार बाकी -21 आली.

येथे बाकी $\neq 0$

$\therefore$ $(x + 2)$ हा $p(x)$ या बहुपदीचा अवयव नाही.

कृती : $(x - 1)$ हा $x^3 + 4x - 5$ या बहुपदीचा अवयव आहे का हे पडताळा.

हे लक्षात ठेवूया.

$p(x)$ ही बहुपदी असून a ही कोणतीही वास्तव संख्या असेल आणि जर $p(a) = 0$ असेल तर $(x - a)$ हा $p(x)$ चा अवयव असतो.

याउलट $(x - a)$ हा $p(x)$ या बहुपदीचा अवयव असेल तर $p(a) = 0$ असते.

उदा (1) अवयव सिद्धांताचा उपयोग करून, $x - 2$ हा $x^3 - x^2 - 4$ या बहुपदीचा अवयव आहे का ते ठरवा.

उकल : $p(x) = x^3 - x^2 - 4$ भाजक $= x - 2$

$\therefore p(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

$\therefore$ अवयव सिद्धांतानुसार, $(x - 2)$ हा $(x^3 - x^2 - 4)$ या बहुपदीचा अवयव आहे.

उदा (2) जर $(x - 1)$ हा $(x^3 - 2x^2 + mx - 4)$ चा अवयव असेल तर m ची किंमत काढा.

उकल : $(x - 1)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे. $\therefore p(1) = 0$

$p(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 4$

$p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + m \times 1 - 4 = 0$

$\therefore 1 - 2 \times 1 + m - 4 = 0$

$\therefore 1 - 2 + m - 4 = 0$ $\therefore m - 5 = 0$ $\therefore m = 5$

कृती : आपण कोरडवाहू शेती करणाऱ्या गोविंदच्या शेतीच्या संदर्भात बहुपदींच्या रूपात शेतीचा खर्च व उत्पन्न या बाबी पाहिल्या होत्या. त्याने बँकेचे कर्ज सव्वा लाख रुपये घेतले व ते 10% व्याजदराने परत केले होते. बियाणांसाठी खर्च 10,000 रुपये, सोयाबीनच्या पिकासाठी खते-कीटकनाशकांसाठी $2000x$ रुपये व त्याच्या मशागतीसाठी $4000x^2$ रुपये खर्च आला होता. कापूस व तूर या पिकांसाठी खते-कीटकनाशकांसाठी $8000y$ रुपये व मशागतीसाठी $9000y^2$ रुपये एवढा खर्च केला होता.

एकूण उत्पन्न $14000x^2 + \frac{25000}{3}y^2 + 16000y$ एवढे झाले.

$x = 2$, $y = 3$ या किमती घेऊन गोविंदच्या शेतीचा जमाखर्च लिहून काढा.

उकल :

जमा		**खर्च**	
1,25,000 रुपये	बँकेचे कर्ज	1,37,000 रुपये	बँकेची व्याजासह परतफेड.
₹ ☐	सोयाबीनचे उत्पन्न	₹ ☐	बियाणांसाठी
₹ ☐	कापसाचे उत्पन्न	₹ ☐	सोयाबीन:खते व कीटकनाशके
₹ ☐	तुरीचे उत्पन्न	₹ ☐	सोयाबीन: मजुरी व मशागत
₹ ☐	एकूण जमा	₹ ☐	कापूस व तूर : खते व कीटकनाशके
		₹ ☐	कापूस व तूर : मजुरी व मशागत
		₹ ☐	एकूण खर्च

सरावसंच 3.5

(1) x ची दिलेली किंमत घेऊन $2x - 2x^3 + 7$ या बहुपदीची किंमत काढा.

(i) $x = 3$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 0$

(2) खालील प्रत्येक बहुपदीकरिता $p(1)$, $p(0)$ आणि $p(-2)$ काढा.

(i) $p(x) = x^3$ (ii) $p(y) = y^2 - 2y + 5$ (iii) $p(x) = x^4 - 2x^2 - x$

(3) जर $m^3 + 2m + a$ या बहुपदीची किंमत $m = 2$ असताना 12 आहे, तर a ची किंमत काढा.

(4) जर $mx^2 - 2x + 3$ या बहुपदीकरता $p(-1) = 7$ असेल तर m ची किंमत काढा.

(5) खालीलपैकी पहिल्या बहुपदीला दुसऱ्या बहुपदीने भागल्यास, येणारी बाकी शेष सिद्धांताचा उपयोग करून काढा.

(i) $(x^2 - 7x + 9)$; $(x + 1)$

(ii) $(2x^3 - 2x^2 + ax - a)$; $(x - a)$

(iii) $(54m^3 + 18m^2 - 27m + 5)$; $(m - 3)$

(6) $y^3 - 5y^2 + 7y + m$ या बहुपदीस $y + 2$ ने भागल्यास बाकी 50 उरते, तर m ची किंमत काढा.

(7) अवयव सिद्धांताचा उपयोग करून, $x + 3$ हा $x^2 + 2x - 3$ चा अवयव आहे का ते ठरवा.

(8) जर $x - 2$ हा $x^3 - mx^2 + 10x - 20$ या बहुपदीचा अवयव असेल तर m ची किंमत काढा.

(9) खालील उदाहरणात $q(x)$ हा $p(x)$ चा अवयव आहे किंवा नाही हे अवयव सिद्धांताने ठरवा.

(i) $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $q(x) = x - 1$

(ii) $p(x) = 2x^3 - x^2 - 45$, $q(x) = x - 3$

(10) $(x + 1)$ ने $(x^{31} + 31)$ ला भागल्यास येणारी बाकी काढा.

(11) $m - 1$ हा $m^{21} - 1$ व $m^{22} - 1$ या बहुपदींचा अवयव आहे हे दाखवा.

(12*) जर $x - 2$ आणि $x - \frac{1}{2}$ हे दोन्ही $nx^2 - 5x + m$ या बहुपदीचे अवयव असतील तर दाखवा की $m = n = 2$

(13) (i) जर $p(x) = 2 + 5x$ तर $p(2) + p(-2) - p(1)$ काढा.

(ii) जर $p(x) = 2x^2 - 5\sqrt{3}x + 5$ तर $p(5\sqrt{3})$ काढा.

जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत आपण बहुपदींचे अवयव कसे काढावे याचा अभ्यास केला आहे. काही उदाहरणे पाहू. अवयव काढा.

उदा (1) $4x^2 - 25$

$= (2x)^2 - (5)^2$

$= (2x + 5)(2x - 5)$

उदा (2) $3x^2 + 7x + 2$

$= \underline{3x^2 + 6x} + \underline{x + 2}$

$= 3x(x + 2) + 1(x + 2)$

$= (x + 2)(3x + 1)$

उदा (3) $63x^2 + 5x - 2$

$= 63x^2 + 14x - 9x - 2$

$= 7x(9x + 2) - 1(9x + 2)$

$= (9x + 2)(7x - 1)$

उदा (4) $6x^2 - 5x - 6$

$= 6x^2 - 9x + 4x - 6$

$= 3x(2x - 3) + 2(2x - 3)$

$= (2x - 3)(3x + 2)$

जाणून घेऊया.

बहुपदींचे अवयव (Factors of polynomials)

काही वेळा दिलेल्या बहुपदीचे रूपांतर $ax^2 + bx + c$ असे करता येते. त्यामुळे तिचे अवयव शोधणे सोपे जाते.

उदा (1) $(y^2-3y)^2 - 5(y^2-3y) - 50$ चे अवयव काढा.

उकल : दिलेल्या बहुपदीत $(y^2-3y) = x$ मानू.

$$\therefore (y^2-3y)^2 - 5(y^2-3y) - 50 = x^2 - 5x - 50$$
$$= x^2 - 10x + 5x - 50$$
$$= x(x - 10) + 5(x - 10)$$
$$= (x - 10)(x + 5)$$
$$= (y^2-3y - 10)(y^2-3y + 5)$$
$$= [y^2-5y + 2y - 10](y^2-3y + 5)$$
$$= [y(y - 5) + 2(y - 5)](y^2-3y + 5)$$
$$= (y - 5)(y + 2)(y^2-3y + 5)$$

उदा (2) अवयव पाडा.

$(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

उकल : $(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

$= (x + 2)(x - 7)(x - 3)(x - 2) + 64$

$= (x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x + 6) + 64$

$= (m - 14)(m + 6) + 64$ . . . . ($x^2 - 5x$ साठी m मानून.)

$= m^2 - 14m + 6m - 84 + 64$

$= m^2 - 8m - 20$

$= (m - 10)(m + 2)$

$= (x^2 - 5x - 10)(x^2 - 5x + 2)$ .... m च्या जागी $x^2 - 5x$ लिहून

सरावसंच 3.6

(1) खालील बहुपदींचे अवयव काढा.

(i) $2x^2 + x - 1$ (ii) $2m^2 + 5m - 3$ (iii) $12x^2 + 61x + 77$

(iv) $3y^2 - 2y - 1$ (v) $\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3}$ (vi) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

(2) खालील बहुपदींचे अवयव काढा.

(i) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$ (ii) $(x - 5)^2 - (5x - 25) - 24$

(iii) $(x^2 - 6x)^2 - 8(x^2 - 6x + 8) - 64$ (iv) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x + 5) - 35$

(v) $(y + 2)(y - 3)(y + 8)(y + 3) + 56$

(vi) $(y^2 + 5y)(y^2 + 5y - 2) - 24$

(vii) $(x - 3)(x - 4)^2(x - 5) - 6$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

(1) खालील प्रत्येक प्रश्नासाठी दिलेल्या पर्यायांपैकी अचूक पर्याय निवडा.

(i) खालीलपैकी बहुपदी कोणती ?

(A) $\frac{x}{y}$ (B) $x^{\sqrt{2}} - 3x$ (C) $x^{-2} + 7$ (D) $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}$

(ii) $\sqrt{7}$ या बहुपदीची कोटी किती ?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 5 (C) 2 (D) 0

(iii) 0 बहुपदीची कोटी किती असते ?

(A) 0 (B) 1 (C) निश्चित करता येत नाही (D) कोणतीही वास्तव संख्या

(iv) $2x^2 + 5x^3 + 7$ या बहुपदीची कोटी किती ?

(A) 3 (B) 2 (C) 5 (D) 7

(v) $x^3 - 1$ या बहुपदीचे सहगुणक रूप कोणते ?

(A) (1, − 1) (B) (3, − 1) (C) (1, 0, 0, − 1) (D) (1, 3, − 1)

(vi) $p(x) = x^2 - 7\sqrt{7}x + 3$ तर $p(7\sqrt{7}) = ?$

(A) 3 (B) $7\sqrt{7}$ (C) $42\sqrt{7} + 3$ (D) $49\sqrt{7}$

(vii) $2x^3 + 2x$ या बहुपदीची $x = -1$ असताना किंमत किती ?

(A) 4 (B) 2 (C) − 2 (D) − 4

(viii) $3x^2 + mx$ या बहुपदीचा $x - 1$ हा अवयव असेल तर m ची किंमत किती ?

(A) 2 (B) − 2 (C) − 3 (D) 3

(ix) $(x^2 - 3)(2x - 7x^3 + 4)$ हा गुणाकार करून मिळणाऱ्या बहुपदीची कोटी किती ?

(A) 5 (B) 3 (C) 2 (D) 0

(x) खालीलपैकी रेषीय बहुपदी कोणती ?

(A) $x + 5$ (B) $x^2 + 5$ (C) $x^3 + 5$ (D) $x^4 + 5$

(2) खालील प्रत्येक बहुपदीची कोटी लिहा.

(i) $5 + 3x^4$ (ii) 7 (iii) $ax^7 + bx^9$ {a, b या स्थिर संख्या आहेत.}

(3) खालील बहुपदी प्रमाण रूपात लिहा.

(i) $4x^2+7x^4-x^3-x+9$ (ii) $p+2p^3+10p^2+5p^4-8$

(4) खालील बहुपदी सहगुणक रूपात लिहा.

(i) x^4+16 (ii) $m^5+2m^2+3m+15$

(5) खालील सहगुणक रूपातील बहुपदी x हे चल वापरून घातांक रूपात लिहा.

(i) (3, −2, 0, 7, 18) (ii) (6, 1, 0, 7) (iii) (4, 5, −3, 0)

(6) बेरीज करा.

(i) $7x^4-2x^3+x+10$; $3x^4+15x^3+9x^2-8x+2$ (ii) $3p^3q+2p^2q+7$; $2p^2q+4pq-2p^3q$

(7) वजाबाकी करा.

(i) $5x^2-2y+9$; $3x^2+5y-7$ (ii) $2x^2+3x+5$; x^2-2x+3

(8) खालील गुणाकार करा.

(i) $(m^3-2m+3)(m^4-2m^2+3m+2)$ (ii) $(5m^3-2)(m^2-m+3)$

(9) $3x^3-8x^2+x+7$ या बहुपदीला $x-3$ या बहुपदीने संश्लेषक पद्‌धतीने भागा व बाकी काढा.

(10) m च्या कोणत्या किमतीकरिता $x+3$ हा $x^3-2mx+21$ या बहुपदीचा अवयव असेल?

(11) 2016 वर्षाच्या शेवटी कोवाड, वरूड व चिखली गावांची लोकसंख्या अनुक्रमे $5x^2-3y^2$, $7y^2+2xy$ आणि $9x^2+4xy$ होती. 2017 वर्षाच्या सुरुवातीला तीनही गावांतून शिक्षण व रोजगाराकरिता अनुक्रमे x^2+xy-y^2, $5xy$ व $3x^2+xy$ माणसे दुसऱ्या गावी गेली. तर 2017 च्या सुरुवातीला त्या गावांची एकूण लोकसंख्या किती होती ?

(12) $bx^2 + x + 5$ व bx^3-2x+5 या बहुपदींना $x-3$ ने भागल्यास येणारी बाकी अनुक्रमे m व n असेल आणि जर $m - n = 0$ असेल तर b ची किंमत काढा.

(13) सरळरूप द्या. $(8m^2+ 3m - 6) - (9m - 7) + (3m^2 - 2m + 4)$

(14) $x^2 + 13x + 7$ मधून कोणती बहुपदी वजा करावी म्हणजे $3x^2 + 5x - 4$ ही बहुपदी मिळेल?

(15) $4m + 2n + 3$ या राशीत कोणती राशी मिळवावी म्हणजे $6m + 3n + 10$ ही बहुपदी मिळेल?

4 गुणोत्तर व प्रमाण

चला, शिकूया.

- गुणोत्तर
- गुणोत्तराचे गुणधर्म
- समान गुणोत्तरांवरील क्रिया
- समान गुणोत्तरांचा सिद्धांत
- परंपरित प्रमाण
- गुणोत्तरातील k पद्धती

जरा आठवूया.

आपण मागील इयत्तांमध्ये गुणोत्तर व प्रमाण यांचा अभ्यास केला आहे. त्यावर आधारित उदाहरणेही आपण सोडवली आहेत.

उदा विमलने तयार केलेले रव्याचे लाडू रुचकर असतात. ती एक वाटी तूप, 3 वाट्या रवा आणि 2 वाट्या साखर घेऊन लाडू बनविते.

येथे रवा आणि साखर यांचे प्रमाण 3:2 किंवा $\frac{3}{2}$ आहे.

जर लाडवांसाठी 12 वाट्या रवा घेतला तर किती साखर लागेल?

साखर x वाट्या लागेल असे मानू. यावरून $\frac{3}{2} = \frac{12}{x}$ $\therefore$ $3x = 24$ $\therefore$ $x = 8$

म्हणजे 12 वाट्या रवा घेऊन लाडू करण्यासाठी 8 वाट्या साखर लागेल.

हेच उदाहरण पुढीलप्रमाणेही करता येते.

रवा $3k$ वाट्या असेल तर साखर $2k$ वाट्या लागेल. कारण $\frac{3k}{2k} = \frac{3}{2}$

$3k = 12$ असेल तर $k = 4$ $\therefore$ $2k = 8$ वाट्या साखर लागेल.

जाणून घेऊया.

गुणोत्तर व प्रमाण (Ratio and proportion)

दोन संख्यांच्या गुणोत्तराची संकल्पना तीन किंवा अधिक संख्यांसाठी विस्तारित करता येते. लाडवांचे उदाहरण पाहा. तूप, रवा आणि साखर यांचे प्रमाण 1 : 3 : 2 आहे.

येथे तूप व रवा यांचे गुणोत्तर 1 : 3 आणि रवा व साखर यांचे गुणोत्तर 3 : 2 आहे. ही माहिती एकाच प्रमाणाने दिली आहे.

तूप 1k = k वाटी, रवा 3k वाट्या आणि साखर 2k वाट्या असे मानता येईल.

आता 12 वाट्या रवा असेल तर लाडवांसाठी किती वाट्या तूप व किती वाट्या साखर लागेल हे काढता येईल.

कारण $3k = 12$ $\therefore$ $k = 4$ आणि $2k = 8$ म्हणजे 4 वाट्या तूप आणि 8 वाट्या साखर लागेल.

हीच कल्पना चार वा अधिक बाबींच्या प्रमाणासाठी देखील वापरता येते.

जर a, b, c, d या चार संख्यांचे प्रमाण 2 : 3 : 7 : 4 असे असेल तर त्या संख्या $2m, 3m, 7m, 4m$ मानू. दिलेली माहिती वापरून m ची किंमत काढता येईल. उदाहरणार्थ, या चार संख्यांची बेरीज 48 असेल तर त्या चार संख्या काढू.

$2m + 3m + 7m + 4m = 16\,m = 48$

$\therefore \quad m = 3$

$\therefore \quad 2m = 6,\ 3m = 9,\ 7m = 21,\ 4m = 12$ अशा संख्या मिळाल्या.

$\therefore$ इष्ट संख्या = 6, 9, 21, 12

उदा (1) खताच्या 18 : 18 : 10 या प्रकारामध्ये नायट्रोजनची संयुगे 18%, फॉस्फरसची संयुगे 18% आणि पोटॅशियमची संयुगे 10% असतात. उरलेला भाग इतर पदार्थांचा असतो. तर त्या प्रकारच्या 20 किलोग्रॅम खतामध्ये प्रत्येक प्रकारच्या संयुगाचे वस्तुमान किती असेल ?

उकल : 20 किग्रॅ खतातील नायट्रोजनच्या संयुगाचे वस्तुमान x किग्रॅ मानू.

$$\therefore \quad \frac{18}{100} = \frac{x}{20} \qquad \therefore \quad x = \frac{18 \times 20}{100} = 3.6$$

$\therefore$ नायट्रोजनचे संयुग 3.6 किग्रॅ असेल.

फॉस्फरसच्या संयुगाचे शतमान 18 हेच असते. $\therefore$ फॉस्फरसचे संयुग 3.6 किग्रॅ असेल.

20 किग्रॅ खतातील पोटॅशियमच्या संयुगाचे वस्तुमान y किग्रॅ मानल्यास

$\frac{10}{100} = \frac{y}{20} \qquad \therefore y = 2 \qquad$ $\therefore$ पोटॅशियमचे संयुग 2 किग्रॅ असेल.

समप्रमाण

एक मोटरगाडी 1 लीटर पेट्रोलमध्ये 10 किमी अंतर जाते.

म्हणून 20 लीटर पेट्रोलमध्ये ती गाडी $20 \times 10 = 200$ किमी अंतर कापेल.

तर 40 लीटर पेट्रोलमध्ये तीच गाडी $40 \times 10 = 400$ किमी अंतर जाईल.

वरील माहिती सारणी रूपात लिहू.

पेट्रोल : x लीटर	1	20	40	
अंतर : y किमी	10	200	400	
$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{20}{200} = \frac{1}{10}$	$\frac{40}{400} = \frac{1}{10}$	$\frac{x}{y} = \text{k}$

गाडीने वापरलेले पेट्रोल (लीटरमध्ये) आणि तेवढ्या पेट्रोलमध्ये कापलेले अंतर (किलोमीटरमध्ये) या राशींचे गुणोत्तर स्थिर आहे. अशा वेळी त्या दोन राशी समप्रमाणात आहेत, म्हणजेच या दोन राशी समचलनात बदलतात असे म्हणतात.

व्यस्तप्रमाण

एका मोटारीला ताशी 50 किमी वेगाने 100 किमी जाण्यास दोन तास लागतात. एका बैलगाडीचा वेग ताशी 5 किमी आहे, तर तेवढेच अंतर जाण्यास बैलगाडीला 20 तास लागतात.

$\therefore$ वेग $\times$ वेळ = अंतर हे लक्षात घेऊन वरील माहिती सारणी रूपात लिहू.

मोटार	वेग/ताशी x	वेळ y	$x \times y$	$x \times y = k$
	50	2	100	
बैलगाडी	5	20	100	

म्हणजे वाहनाचा वेग आणि प्रवासाला लागणारा वेळ यांचा गुणाकार स्थिर आलेला दिसतो. अशा वेळी त्या राशी व्यस्त प्रमाणात आहेत, किंवा त्या राशी व्यस्त चलनात बदलतात असे म्हणतात.

वरील उदाहरणात, वाहनाचा वेग आणि ठरावीक अंतर जाण्यास लागणारा वेळ हे व्यस्त प्रमाणात आहेत.

जरा आठवूया.

गुणोत्तराचे गुणधर्म

(1) a आणि b या दोन संख्यांचे गुणोत्तर $a : b$ किंवा $\frac{a}{b}$ अशा स्वरूपात लिहिता येते. येथे a ला पूर्वपद (पहिले पद) आणि b ला उत्तर पद (दुसरे पद) म्हणतात.

(2) दोन संख्यांच्या गुणोत्तरात उत्तरपद 100 असते तेव्हा त्या गुणोत्तरास शतमान असे म्हणतात.

(3) प्रमाणातील सर्व संख्यांना एकाच शून्येतर संख्येने गुणले किंवा भागले तर ते प्रमाण बदलत नाही.

उदा. 3:4 = 6:8 = 9:12 तसेच 2:3:5 = 8:12:20 किंवा k ही शून्येतर संख्या असेल, तर

$a : b = ak : bk$ $\quad\quad$ $a : b : c = ak : bk : ck$

(4) ज्या संख्यांचे गुणोत्तर काढायचे आहे त्या एकाच प्रकारच्या मापनाच्या असल्या तर प्रत्येकीच्या मापनाचे एकक समान असले पाहिजे.

(5) गुणोत्तराला एकक नसते.

जसे, 2 किलोग्रॅम व 300 ग्रॅम यांचे गुणोत्तर 2:300 नसते परंतु 2 किलोग्रॅम = 2000 ग्रॅम म्हणून ते गुणोत्तर 2000 : 300 म्हणजेच 20:3 आहे.

उदा (1) सीमाच्या व राजश्रीच्या वयांचे गुणोत्तर 3 : 1 आहे. राजश्रीच्या व अतुलच्या वयांचे गुणोत्तर 2 : 3 आहे. तर सीमा, राजश्री आणि अतुल यांच्या वयांचे गुणोत्तर काढा.

उकल : सीमाचे वय : राजश्रीचे वय = 3 : 1 $\quad$ राजश्रीचे वय : अतुलचे वय = 2 : 3

पहिल्या गुणोत्तराचे उत्तरपद हे दुसऱ्या गुणोत्तरातील पूर्वपद असायला हवे.

यासाठी म्हणजे सलग गुणोत्तर मिळवण्यासाठी पहिल्या गुणोत्तरातील पदांना 2 ने गुणू म्हणजे 3:1 = 6:2 मिळेल.

$$\frac{\text{सीमाचे वय}}{\text{राजश्रीचे वय}} = \frac{6}{2}, \quad \frac{\text{राजश्रीचे वय}}{\text{अतुलचे वय}} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ सीमाचे वय : राजश्रीचे वय : अतुलचे वय हे गुणोत्तर 6 : 2 : 3 असे आहे.

उदा (2) एका आयताकृती शेताची लांबी 1.2 किमी असून त्याची रुंदी 400 मी आहे, तर लांबीचे रुंदीशी गुणोत्तर काढा.

उकल : येथे लांबी किलोमीटरमध्ये व रुंदी मीटरमध्ये आहे. गुणोत्तरासाठी दोन्ही एकके समान हवीत म्हणून किलोमीटरचे मीटरमध्ये रूपांतर करू.

1.2 किमी = 1.2 ×1000 = 1200 मीटर $\therefore$ 1200 मीटरचे 400 मीटरशी गुणोत्तर घेऊ.

अपेक्षित गुणोत्तर = $\frac{1200}{400} = \frac{3}{1}$, म्हणजेच 3:1 आहे.

उदा (3) महेश यांच्या दरमहा खर्चाचे त्यांच्या उत्पन्नाशी असलेले गुणोत्तर 3:5 आहे, तर त्यांचा खर्च त्यांच्या उत्पन्नाच्या शेकडा किती आहे ?

उकल : खर्चाचे उत्पन्नाशी असलेले गुणोत्तर 3:5 आहे. याचे शतमानात रूपांतर करायचे म्हणजे दुसरे पद 100 करायचे.

$\frac{3}{5} = \frac{3\times20}{5\times20} = \frac{60}{100}$ म्हणजे $\frac{\text{खर्च}}{\text{उत्पन्न}} = \frac{60}{100} = 60\%$ $\therefore$ महेश यांचा खर्च उत्पन्नाच्या 60% आहे.

उदा (4) एका बागेत आंबा व चिकूच्या झाडांच्या संख्यांचे गुणोत्तर 2:3 आहे. जर त्या बागेत प्रत्येक प्रकारची 5 झाडे जास्त लावली असती तर त्यांच्या संख्यांचे गुणोत्तर 5 : 7 झाले असते. तर त्या बागेत आंब्याची व चिकूची झाडे किती आहेत?

उकल : सुरुवातीचे गुणोत्तर 2 : 3 आहे.

बागेतील आंब्याची झाडे = $2x$ व चिकूची झाडे = $3x$ मानू.

दिलेल्या अटीनुसार, $\frac{2x+5}{3x+5} = \frac{5}{7}$

$$14x + 35 = 15x + 25$$

$$\therefore x = 10$$

$\therefore$ बागेतील आंब्याची झाडे = $2x$ = 2 ×10= 20

$\therefore$ बागेतील चिकूची झाडे = $3x$ = 3 ×10= 30

उदा (5) दोन संख्यांचे गुणोत्तर 5 : 7 आहे. जर प्रत्येक संख्येत 40 मिळवले तर येणाऱ्या बेरजांचे गुणोत्तर 25 : 31 होते. तर त्या संख्या काढा.

उकल : पहिली संख्या = $5x$ आणि दुसरी संख्या = $7x$ मानू.

दिलेल्या अटीवरून.

$$\frac{5x+40}{7x+40}=\frac{25}{31}$$

$$31(5x+40)=25(7x+40)$$

$$155x+1240=175x+1000$$

$$1240-1000 = 175x-155x$$

$$240=20x$$

$$x=12$$

∴ पहिली संख्या = 5 × 12 = 60

दुसरी संख्या = 7 × 12 = 84

∴ दिलेल्या संख्या 60 व 84 आहेत.

सरावसंच 4.1

(1) खाली दिलेल्या संख्यांच्या जोड्यांमधील पहिल्या संख्येचे दुसऱ्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.

(i) 72, 60 (ii) 38,57 (iii) 52,78

(2) पुढील राशींपैकी पहिल्या राशीचे दुसऱ्या राशीशी असलेले गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.

(i) 700 रुपये, 308 रुपये (ii) 14 रु, 12 रु. 40 पै.

(iii) 5 लीटर, 2500 मिलिलीटर (iv) 3 वर्ष 4 महिने, 5 वर्षे 8 महिने

(v) 3.8 किलोग्रॅम, 1900 ग्रॅम (vi) 7 मिनिटे 20 सेकंद, 5 मिनिटे 6 सेकंद.

(3) पुढील शतमाने संक्षिप्त गुणोत्तरांच्या रूपात लिहा.

(i) 75 : 100 (ii) 44 : 100 (iii) 6.25% (iv) 52 : 100 (v) 0.64%

(4) एक लहान घर 3 माणसे 8 दिवसांत बांधू शकतात, तर तेच घर 6 दिवसांत बांधण्यास किती माणसे लागतील ?

(5) पुढील गुणोत्तरांचे शतमानात रूपांतर करा.

(i) 15 : 25 (ii) 47 : 50 (iii) $\frac{7}{10}$ (iv) $\frac{546}{600}$ (v) $\frac{7}{16}$

(6) आभा आणि तिची आई यांच्या वयांचे गुणोत्तर 2:5 आहे. आभाच्या जन्माच्या वेळी तिच्या आईचे वय 27 वर्षे होते. तर आभा आणि तिची आई यांची आजची वये काढा.

(7) वत्सला व सारा यांची आजची वये अनुक्रमे 14 वर्षे व 10 वर्षे आहेत; किती वर्षांनी त्यांच्या वयांचे गुणोत्तर 5:4 होईल ?

(8) रेहाना व तिची आई यांच्या आजच्या वयांचे गुणोत्तर 2 : 7 आहे. 2 वर्षांनी त्यांच्या वयांचे गुणोत्तर 1 : 3 होईल. तर रेहानाचे आजचे वय किती ?

जाणून घेऊया.

गुणोत्तरांची तुलना

जर $b > 0, d > 0$ तर $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ या गुणोत्तरांची तुलना पाहू. ही तुलना खालील नियमांनुसार करता येते.

(i) जर $ad > bc$ तर $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (ii) जर $ad < bc$ तर $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (iii) जर $ad = bc$ तर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

खाली दिलेल्या गुणोत्तरांच्या प्रत्येक जोडीतील क्रमसंबंध ठरवा.

उदा (1) $\frac{4}{9}, \frac{7}{8}$

उकल : 4×8 [?] 7×9

$32 < 63$

$\therefore \frac{4}{9} < \frac{7}{8}$

उदा (2) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{13} \times \sqrt{5},$ [?] $\sqrt{8} \times \sqrt{7}$

$\sqrt{65}$ [?] $\sqrt{56}$

$\sqrt{65} > \sqrt{56}$

$\therefore \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}} > \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

उदा (3) जर a व b पूर्णांक संख्या असतील आणि $a < b$, $b \neq \pm 1$ तर $\frac{a-1}{b-1}, \frac{a+1}{b+1}$ या गुणोत्तरांतील क्रमसंबंध ठरवा.

उकल : $a < b$

$\therefore a - 1 < b - 1$

आता $\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1}$ या वजाबाकीचा विचार करू.

$$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} = \frac{(a-1)(b+1)-(a+1)(b-1)}{(b-1)(b+1)}$$

$$= \frac{(ab-b+a-1)-(ab+b-a-1)}{b^2-1}$$

$$= \frac{ab-b+a-1-ab-b+a+1}{b^2-1}$$

$$= \frac{2a-2b}{b^2-1}$$

$$= \frac{2(a-b)}{b^2-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

आता $a < b$ $\therefore a - b < 0$

तसेच $b^2-1 > 0$ कारण $b \neq \pm 1$

$\frac{2(a-b)}{b^2-1} < 0 \ldots\ldots\ldots\ (2)$

$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} < 0 \ldots (1)$ व (2) वरून

$\frac{a-1}{b-1} < \frac{a+1}{b+1}$

उदा (4) जर $a : b = 2 : 1$ आणि $b : c = 4 : 1$ तर $\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3$ या राशीची किंमत काढा.

उकल : $\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$ $\therefore a = 2b$ $\frac{b}{c} = \frac{4}{1}$ $\therefore b = 4c$

$a = 2b = 2 \times 4c = 8c$ $\therefore a = 8c$

आता $a = 8c$, $b = 4c$ या किमती घालून

$$\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = \left(\frac{(8c)^4}{32\times 4^2\times c^2\times c^2}\right)^3$$

$$= \left[\frac{8\times 8\times 8\times 8\times c^4}{32\times 16\times c^2\times c^2}\right]^3$$

$$= (8)^3$$

$$\therefore \left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = 512$$

सरावसंच 4.2

(1) $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ या गुणधर्माचा उपयोग करून रिकाम्या जागी योग्य संख्या लिहा.

(i) $\frac{5}{7} = \frac{....}{28} = \frac{35}{....} = \frac{....}{3.5}$ (ii) $\frac{9}{14} = \frac{4.5}{....} = \frac{....}{42} = \frac{....}{3.5}$

(2) पुढील गुणोत्तरे काढा.

(i) वर्तुळाच्या त्रिज्येचे त्याच्या परिघाशी असलेले गुणोत्तर.

(ii) r त्रिज्या असलेल्या वर्तुळाच्या परिघाचे, त्याच्या क्षेत्रफळाशी असलेले गुणोत्तर.

(iii) बाजू 7 सेमी असलेल्या चौरसाच्या कर्णाचे त्याच्या बाजूशी असलेले गुणोत्तर.

(iv) लांबी 5 सेमी व रुंदी 3.5 सेमी असलेल्या आयताच्या परिमितीचे, क्षेत्रफळाशी असलेले गुणोत्तर.

(3) पुढे दिलेल्या गुणोत्तरांच्या जोड्यांमधील लहान-मोठेपणा ठरवा.

(i) $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{3}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$ (iii) $\frac{5}{18}, \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}}, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1}, \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) □ABCD समांतरभुज चौकोन आहे. त्याच्या $\angle A$ व $\angle B$ च्या मापांचे गुणोत्तर 5 : 4 आहे. तर $\angle B$ चे माप काढा.

(ii) अल्बर्ट आणि सलीम यांच्या आजच्या वयांचे गुणोत्तर 5 : 9 आहे. पाच वर्षांनंतर त्यांच्या वयांचे गुणोत्तर 3 : 5 होईल, तर त्यांची आजची वये काढा.

(iii) एका आयताच्या लांबी व रुंदीचे गुणोत्तर 3 : 1 आहे. आयताची परिमिती 36 सेमी आहे, तर आयताची लांबी व रुंदी काढा.

(iv) दोन संख्यांचे गुणोत्तर 31 : 23 असून त्यांची बेरीज 216 आहे, तर त्या संख्या काढा.

(v) दोन संख्यांचा गुणाकार 360 आहे व त्याचे गुणोत्तर 10 : 9 आहे, तर त्या संख्या काढा.

(5*) जर $a : b = 3 : 1$ आणि $b : c = 5 : 1$ तर (i) $\left(\frac{a^3}{15b^2c}\right)^3$ (ii) $\frac{a^2}{7bc}$ या राशींच्या किमती काढा.

(6*) $\sqrt{0.04 \times 0.4 \times a} = 0.4 \times 0.04 \times \sqrt{b}$ तर $\frac{a}{b}$ हे गुणोत्तर काढा.

(7) $(x + 3) : (x + 11) = (x - 2) : (x + 1)$ तर x ची किंमत काढा.

जाणून घेऊया.

समान गुणोत्तरांवरील क्रिया

समानतेच्या गुणधर्मांचा उपयोग करून दोन समान गुणोत्तरांवर काही क्रिया करता येतात. त्यांचा अभ्यास करू.

जर a , b, c, d या धन संख्या असतील तर त्यांसाठी खालील गुणधर्म समजून घेऊ.

(I) व्यस्त क्रिया (Invertendo) जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad a \times d = b \times c$$

$$\therefore \quad b \times c = a \times d$$

$$\therefore \quad \frac{b \times c}{a \times c} = \frac{a \times d}{a \times c}$$ (दोन्ही बाजूंस $a \times c$ ने भागून.)

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$\therefore$ जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ **या गुणधर्माला 'व्यस्त क्रिया' म्हणतात.**

(II) एकांतर क्रिया (Alternando) जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad a \times d = b \times c$$

$$\frac{a \times d}{c \times d} = \frac{b \times c}{c \times d}$$ (दोन्ही बाजूंस $c \times d$ ने भागून)

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ **या गुणधर्माला 'एकांतर क्रिया' म्हणतात.**

(III) योग क्रिया (Componendo) जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \quad \text{(दोन्ही बाजूंत 1 मिळवून)}$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ **या गुणधर्माला 'योग क्रिया' म्हणतात.**

(IV) वियोग क्रिया (Dividendo) जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \quad \text{(दोन्ही बाजूंतून 1 वजा करून)}$$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ **या गुणधर्माला 'वियोग क्रिया' म्हणतात.**

(V) योग वियोग क्रिया (Componendo-dividendo) जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$, $a \neq b, c \neq d$

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \quad \text{(योग क्रिया करून)} \quad ....(1)$$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \quad \text{(वियोग क्रिया करून)} \quad ....(2)$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d} \quad \text{(1) व (2) वरून.}$$

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ **या गुणधर्माला 'योग-वियोग क्रिया' म्हणतात.**

योग क्रिया आणि वियोग क्रिया यांचे सामान्य रूप

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (एकदा योग क्रिया)

$$\frac{a+2b}{b}=\frac{c+2d}{d} \quad \text{(दोनदा योग क्रिया करून)}$$

सामान्यपणे $\frac{a+mb}{b}=\frac{c+md}{d}$ (m वेळा योग क्रिया करून) ...(1)

तसेच जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a-mb}{b}=\frac{c-md}{d}$ (m वेळा वियोग क्रिया करून) ...(2)

आणि जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+mb}{a-mb}=\frac{c+md}{c-md}$ ...((1) व (2) वरून, भागाकार करून)

हे लक्षात ठेवूया.

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (व्यस्त क्रिया)

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (एकांतर क्रिया)

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (योग क्रिया)

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (वियोग क्रिया)

जर $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ तर $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (योग-वियोग क्रिया)

सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) जर $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ तर $\frac{a+7b}{7b}$ हे गुणोत्तर काढा.

रीत I

उकल : जर $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ तर $\frac{a}{5}=\frac{b}{3}=k$, एकांतर क्रिया करून

$\therefore a = 5k, b = 3k$

$\therefore \frac{a+7b}{7b}=\frac{5k+7\times 3k}{7\times 3k}$

$=\frac{5k+21k}{21k}$

$=\frac{26k}{21k} \quad =\frac{26}{21}$

रीत II

$\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$

$\therefore \frac{a}{7b}=\frac{5}{21}$

$\therefore \frac{a+7b}{7b}=\frac{5+21}{21}$ (योगक्रिया करून)

$\therefore \frac{a+7b}{7b}=\frac{26}{21}$

उदा. (2) जर $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$ तर $\frac{5a-b}{b}$ काढा.

रीत I

उकल : $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$

$\therefore \frac{a}{7}=\frac{b}{4}$ एकांतर क्रिया करून

$\therefore \frac{a}{7}=\frac{b}{4}=m$ मानू

$\therefore a = 7m, \quad b = 4m$

$\therefore \frac{5a-b}{b} = \frac{5(7m)-4m}{4m}$

$= \frac{35m-4m}{4m}$

$= \frac{31}{4}$

रीत II

$\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$

$\frac{5a}{b}=\frac{5\times 7}{4}$

$=\frac{35}{4}$

$\frac{5a-b}{b}=\frac{35-4}{4}$ (वियोग क्रिया करून)

$\frac{5a-b}{b}=\frac{31}{4}$

उदा. (3) जर $\frac{a}{b}=\frac{7}{3}$ तर $\frac{a+2b}{a-2b}$ ची किंमत काढा.

उकल : रीत I : समजा $a = 7m, b = 3m$

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{7m+2\times 3m}{7m-2\times 3m}$$

$$= \frac{7m+6m}{7m-6m}$$

$$= \frac{13m}{m} = \frac{13}{1}$$

रीत II : $\therefore \frac{a}{b}=\frac{7}{3}$

$\therefore \frac{a}{2b}=\frac{7}{6}$ ...... दोन्ही बाजूंना $\frac{1}{2}$ ने गुणून

$\therefore \frac{a+2b}{a-2b}=\frac{7+6}{7-6}$ (योग-वियोग क्रिया करून)

$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{13}{1}$

उदा (4) जर $\frac{a}{3}=\frac{b}{2}$ तर $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ ची किंमत काढा.

उकल :

रीत I

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{2}$$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ .... एकांतर क्रियेने

आता $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ च्या प्रत्येक पदास b ने भागून.

$$\frac{\frac{5a}{b}+\frac{3b}{b}}{\frac{7a}{b}-\frac{2b}{b}} = \frac{5\left(\frac{a}{b}\right)+3}{7\left(\frac{a}{b}\right)-2}$$

$$= \frac{5\left(\frac{3}{2}\right)+3}{7\left(\frac{3}{2}\right)-2}$$

$$= \frac{\frac{15}{2}+3}{\frac{21}{2}-2}$$

$$= \frac{15+6}{21-4}$$

$$= \frac{21}{17}$$

रीत II

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{2}$$

$\therefore \frac{a}{3}=\frac{b}{2}$ = t मानू.

$\therefore$ a = 3t व b = 2t या किमती ठेवून.

$$\frac{5a+3b}{7a-2b} = \frac{5(3t)+3(2t)}{7(3t)-2(2t)} \quad (t \neq 0)$$

$$= \frac{15t+6t}{21t-4t}$$

$$= \frac{21t}{17t}$$

$$= \frac{21}{17}$$

उदा (5) जर $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$ तर $\frac{4x - y}{4x + y}$ ची किमत काढा.

उकल :

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4x}{y} = \frac{16}{5} \qquad \text{...(दोन्ही बाजूंना 4 ने गुणून)}$$

$$\therefore \frac{4x + y}{4x - y} = \frac{16 + 5}{16 - 5} \qquad \text{...(वियोग-योग क्रिया करून)}$$

$$\therefore \frac{4x + y}{4x - y} = \frac{21}{11}$$

$$\therefore \frac{4x - y}{4x + y} = \frac{11}{21}$$

$\therefore$

उदा (6) जर $5x = 4y$ तर $\frac{3x^2 + y^2}{3x^2 - y^2}$ ची किंमत काढा.

उकल :

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \frac{3x^2}{y^2} = \frac{48}{25} \qquad \text{...(दोन्ही बाजूंस 3 ने गुणून)}$$

$$\therefore \frac{3x^2 + y^2}{3x^2 - y^2} = \frac{48 + 25}{48 - 25} \qquad \text{...(योग-वियोग क्रिया करून)}$$

$$\therefore \frac{3x^2 + y^2}{3x^2 - y^2} = \frac{73}{23}$$

$\therefore$

जाणून घेऊया.

समान गुणोत्तरांच्या गुणधर्मांचा उपयोग (Use of equal ratios)

काही समीकरणे सोडवण्यासाठी इतर पद्धतींपेक्षा समान गुणोत्तरांवरील क्रियांचा उपयोग करणे सोईचे असते.

उदा (1) समीकरण सोडवा. $\frac{3x^2 + 5x + 7}{10x + 14} = \frac{3x^2 + 4x + 3}{8x + 6}$

उकल : $\frac{3x^2 + 5x + 7}{10x + 14} = \frac{3x^2 + 4x + 3}{8x + 6}$

$$\frac{(6x^2 + 10x + 14)}{10x + 14} = \frac{(6x^2 + 8x + 6)}{8x + 6} \qquad \text{(दोन्ही बाजूंस 2 ने गुणून)}$$

$$\frac{(6x^2+10x+14)-(10x+14)}{10x+14}=\frac{(6x^2+8x+6)-(8x+6)}{8x+6} \quad \text{(वियोग क्रिया करून)}$$

$$\therefore \quad \frac{6x^2}{10x+14}=\frac{6x^2}{8x+6}$$

हे समीकरण $x=0$ या किमतीसाठी सत्य आहे. $\therefore$ $x=0$ ही एक उकल आहे.

जर $x \neq 0$ तर $x^2 \neq 0$, $\therefore$ $6x^2$ ने भागून, $\frac{1}{10x+14}=\frac{1}{8x+6}$

$\therefore \quad 8x+6=10x+14$

$\therefore \quad 6-14=10x-8x$

$\therefore \quad -8=2x$

$\therefore \quad x=-4$

$\therefore$ $x=-4$ किंवा $x=0$ या दिलेल्या समीकरणाच्या उकली आहेत.

उदा (2) सोडवा $\frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2}}=\frac{5}{1}$

$$\frac{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})+(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})-(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}=\frac{5+1}{5-1} \quad \text{(योग-वियोग क्रिया करून)}$$

$$\therefore \quad \frac{2\sqrt{x+7}}{2\sqrt{x-2}}=\frac{6}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x-2}}=\frac{3}{2} \quad \text{(दोन्ही बाजूंचे वर्ग करून)}$$

$$\therefore \quad \frac{x+7}{x-2}=\frac{9}{4}$$

$\therefore \quad 4x+28=9x-18$

$\therefore \quad 28+18=9x-4x$

$\therefore \quad 46=5x$

$\therefore \quad \frac{46}{5}=x$

$\therefore$ $x=\frac{46}{5}$ ही समीकरणाची उकल आहे.

कृती

जाड कागदाचे पाच तुकडे घ्या. प्रत्येक कागदावर खालीलपैकी एक एक विधान लिहा.

(i) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (ii) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (iii) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bd}$ (iv) $\frac{c}{d} = \frac{c-a}{d-b}$ (v) $\frac{a}{b} = \frac{rc}{rd}$

a, b, c, d या धनसंख्या आहेत आणि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ही माहिती दिली आहे. वरीलपैकी प्रत्येक विधान सत्य की असत्य आहे हे कार्डाच्या मागे लिहा. विधान असत्य असल्यास त्याचे कारण लिहा.

सरावसंच 4.3

(1) जर $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ तर पुढील गुणोत्तरांच्या किंमती काढा.

(i) $\frac{5a+3b}{5a-3b}$ (ii) $\frac{2a^2+3b^2}{2a^2-3b^2}$ (iii) $\frac{a^3-b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7a+9b}{7a-9b}$

(2) जर $\frac{15a^2+4b^2}{15a^2-4b^2} = \frac{47}{7}$ तर पुढील गुणोत्तरांच्या किंमती ठरवा.

(i) $\frac{a}{b}$ (ii) $\frac{7a-3b}{7a+3b}$ (iii) $\frac{b^2-2a^2}{b^2+2a^2}$ (iv) $\frac{b^3-2a^3}{b^3+2a^3}$

(3) जर $\frac{3a+7b}{3a-7b} = \frac{4}{3}$ तर $\frac{3a^2-7b^2}{3a^2+7b^2}$ या गुणोत्तराची किंमत काढा.

(4) पुढील समीकरणे सोडवा.

(i) $\frac{x^2+12x-20}{3x-5} = \frac{x^2+8x+12}{2x+3}$ (ii) $\frac{10x^2+15x+63}{5x^2-25x+12} = \frac{2x+3}{x-5}$

(iii) $\frac{(2x+1)^2+(2x-1)^2}{(2x+1)^2-(2x-1)^2} = \frac{17}{8}$ (iv*) $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}} = \frac{4}{1}$

(v) $\frac{(4x+1)^2+(2x+3)^2}{4x^2+12x+9} = \frac{61}{36}$ (vi) $\frac{(3x-4)^3-(x+1)^3}{(3x-4)^3+(x+1)^3} = \frac{61}{189}$

कृती : खाली दिलेल्या मधल्या चौकटीतील a आणि b च्या किमती बदलून, म्हणजे $a : b$ चे गुणोत्तर बदलून वेगवेगळी उदाहरणे तयार करता येतील. तसे बदल करून शिक्षकांनी भरपूर सराव द्यावा.

$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$

$\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2} =$ -----

$\frac{3a}{4b} =$ -----

$\frac{2a-b}{2a+b} =$ -----

$\frac{a^2+b^2}{b^2} =$ ---

$\frac{a}{2b} =$ -----

जाणून घेऊया.

समान गुणोत्तरांचा सिद्‌धांत (Theorem on equal ratios)

जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ या गुणधर्माला समान गुणोत्तरांचा सिद्‌धांत म्हणतात.

सिद्‌धता : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ मानू. $\therefore$ $a = bk$ आणि $c = dk$

$$\therefore \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

आपल्याला माहीत आहे की, $\frac{a}{b} = \frac{al}{bl}$

$\therefore$ जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, तर $\frac{al}{bl} = \frac{cm}{dm} = \frac{al+cm}{bl+dm} = k$

याच पद्‌धतीने विचार करून जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots\dots$ (सांत पदे) आणि जर l, m, n या शून्येतर संख्या असतील तर प्रत्येक गुणोत्तर = $\frac{al+cm+en+\dots}{bl+dm+fn+\dots}$ (सांत पदे) हे समान गुणोत्तरांच्या सिद्‌धांताचे सामान्य रूप मिळते.

विचार करूया.

एका व्यायामशाळेत शिशुगटात 35 मुली व 42 मुलगे, बालगटात 30 मुली व 36 मुलगे आणि तरुण गटात 20 मुली व 24 मुलगे आहेत. तर प्रत्येक गटातील मुलींची संख्या आणि मुलग्यांची संख्या यांचे गुणोत्तर किती आहे ?

सांघिक कवायतीसाठी तिन्ही गट मैदानावर एकत्र केले. आता एकत्र झालेल्या समूहातील मुलींची संख्या व मुलग्यांची संख्या यांचे गुणोत्तर किती आहे ?

वरील प्रश्नांच्या उत्तरातून तुम्हांला समान गुणोत्तरांच्या सिद्‌धांताचा पडताळा आला का ?

उदा (1) खालील विधानातील रिकाम्या जागा भरा.

(i) $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{4a+9b}{\dots\dots\dots\dots}$ (ii) $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = \frac{5x-3y+4z}{\dots\dots\dots\dots\dots}$

उकल : (i) $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{4a+9b}{4\times3+9\times7} = \frac{4a+9b}{12+63} = \frac{4a+9b}{75}$

(ii) $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = \frac{5\times x}{5\times 3} = \frac{-3\times y}{-3\times 5} = \frac{4\times z}{4\times 4}$

$$\therefore \quad = \frac{5x}{15} = \frac{-3y}{-15} = \frac{4z}{16}$$

$$= \frac{5x-3y+4z}{15-15+16}$$ ----(समान गुणोत्तरांच्या सिद्‌धांतावरून)

$$= \frac{5x-3y+4z}{16}$$

उदा (2) जर $\frac{a}{(x-2y+3z)}=\frac{b}{(y-2z+3x)}=\frac{c}{(z-2x+3y)}$ आणि $x + y + z \neq 0$ तर

प्रत्येक गुणोत्तर = $\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$ हे दाखवा.

उकल : $\frac{a}{(x-2y+3z)}=\frac{b}{(y-2z+3x)}=\frac{c}{(z-2x+3y)}$ = k मानू.

∴ समान गुणोत्तरांच्या सिद्धांताने

$$k=\frac{a+b+c}{(x-2y+3z)+(y-2z+3x)+(z-2x+3y)}$$

$$=\frac{a+b+c}{2x+2y+2z}$$

$$=\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{x-2y+3z}=\frac{b}{y-2z+3x}=\frac{c}{z-2x+3y}=\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

उदा (3) जर $\frac{y}{b+c-a}=\frac{z}{c+a-b}=\frac{x}{a+b-c}$ तर $\frac{a}{z+x}=\frac{b}{x+y}=\frac{c}{y+z}$ हे सिद्ध करा.

उकल : प्रथम दिलेल्या समान गुणोत्तरांमध्ये व्यस्त क्रिया करून

$$\frac{b+c-a}{y}=\frac{c+a-b}{z}=\frac{a+b-c}{x}$$

आता $\frac{b+c-a}{y}=\frac{c+a-b}{z}=\frac{a+b-c}{x}$ = k मानू.

∴ समान गुणोत्तरांच्या सिद्धांताने

$$k=\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{z+x}$$

$$=\frac{2a}{z+x} \quad .....(I)$$

$$k=\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{x+y}$$

$$=\frac{2b}{x+y} \quad ....(II)$$

$$k=\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{y+z}$$

$$=\frac{2c}{y+z} \quad ......(III)$$

$$\therefore \quad \frac{2a}{z+x}=\frac{2b}{x+y}=\frac{2c}{y+z}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{z+x}=\frac{b}{x+y}=\frac{c}{y+z}$$

उदा (4) सोडवा : $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}=\frac{7x-3}{5x+2}$

उकल : उदाहरणाचे निरीक्षण केल्यावर असे दिसते की उजव्या बाजूच्या गुणोत्तरातील पूर्वपदाला व उत्तरपदाला $2x$ ने गुणले तर पहिल्या गुणोत्तरातील प्रत्येकी दोन पदे मिळतात. म्हणून दुसऱ्या गुणोत्तरातील दोन्ही पदांना $2x$ ने गुणू.परंतु त्याआधी x शून्य नाही हे निश्चित करून घेऊ.

जर $x = 0$ असेल तर $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{8}{7}$ आणि $\frac{7x-3}{5x+2}=\frac{-3}{2}$

$\therefore\ \frac{8}{7}=\frac{-3}{2}$ हे विसंगत विधान मिळते.

$\therefore\ x \neq 0$

$\therefore$ दुसऱ्या गुणोत्तराच्या दोन्ही पदांना $2x$ ने गुणून.

$$\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}=\frac{2x(7x-3)}{2x(5x+2)}=k$$

$$\therefore\ \frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4k+7}=\frac{14x^2-6x}{10x^2+4x}=k$$

$$\therefore\ \frac{14x^2-6x+8-14x^2+6x}{10x^2+4x+7-10x^2-4x}=\frac{8}{7}=k$$

$$\therefore\ k=\frac{8}{7}$$

$$\therefore\ \frac{7x-3}{5x+2}=\frac{8}{7}$$

$$\therefore\ 49x-21=40x+16$$

$$\therefore\ 49x-40x=16+21$$

$$\therefore\ 9x=37 \qquad \therefore\ x=\frac{37}{9}$$

सरावसंच 4.4

(1) पुढील विधानांतील रिकाम्या जागा भरा.

(i) $\frac{x}{7}=\frac{y}{3}=\frac{3x+5y}{.......}=\frac{7x-9y}{......}$ (ii) $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{7}=\frac{a-2b+3c}{......}=\frac{......}{6-8+14}$

(2) $5m-n=3m+4n$ तर पुढील राशींच्या किमती काढा. ''

(i) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ (ii) $\frac{3m+4n}{3m-4n}$

(3) (i) जर $a(y+z)=b(z+x) = c(x+y)$ आणि a, b, c पैकी कोणत्याही दोन संख्या समान नाहीत तर $\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$ हे दाखवा.

(ii) जर $\frac{x}{3x-y-z}=\frac{y}{3y-z-x}=\frac{z}{3z-x-y}$ आणि $x+y+z \neq 0$ तर प्रत्येक गुणोत्तराची किंमत 1 आहे असे दाखवा.

(iii) जर $\frac{ax+by}{x+y} = \frac{bx+az}{x+z} = \frac{ay+bz}{y+z}$ आणि $x+y+z \neq 0$ तर प्रत्येक गुणोत्तर $\frac{a+b}{2}$ आहे, हे सिद्ध करा.

(iv) जर $\frac{y+z}{a} = \frac{z+x}{b} = \frac{x+y}{c}$ तर $\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{c+a-b} = \frac{z}{a+b-c}$ हे दाखवा.

(v) जर $\frac{3x-5y}{5z+3y} = \frac{x+5z}{y-5x} = \frac{y-z}{x-z}$ तर प्रत्येक गुणोत्तर $\frac{x}{y}$ एवढे आहे हे दाखवा.

(4) सोडवा. (i) $\frac{16x^2-20x+9}{8x^2+12x+21} = \frac{4x-5}{2x+3}$ (ii) $\frac{5y^2+40y-12}{5y+10y^2-4} = \frac{y+8}{1+2y}$

जाणून घेऊया.

परंपरित प्रमाण (Continued Proportion)

पुढील गुणोत्तरे विचारात घ्या. 4:12 आणि 12:36 ही गुणोत्तरे समान आहेत. या दोन प्रमाणांतील पहिल्याचे उत्तरपद आणि दुसऱ्याचे पूर्व पद समान आहे. म्हणून 4, 12, 36 या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत असे म्हणतात.

जेव्हा $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ तेव्हा a, b, c या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत असे म्हणतात.

जर $ac = b^2$, तर दोन्ही बाजूंना bc ने भागून $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ हे समीकरण मिळते.

$\therefore$ $ac = b^2$ असेल, तर a, b, c परंपरित प्रमाणात असतात.

जेव्हा a, b, c परंपरित प्रमाणात असतात तेव्हा b ला a आणि c यांचा '**भूमितीय मध्य**' (Geometric mean) किंवा '**मध्यम प्रमाण पद**' (Mean proportional) म्हणतात.

यावरून लक्षात घ्या, की खालील सर्व विधाने समान अर्थाची आहेत.

$\therefore$ (1) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ (2) $b^2 = ac$ (3) a, b, c परंपरित प्रमाणात आहेत.

(4) b हा a व c यांचा भूमितीमध्य आहे. (5) b हे a व c चे मध्यम प्रमाणपद आहे.

परंपरित प्रमाणाची संकल्पनासुद्धा विस्तारित करता येते.

जर $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{f}$ तर a, b, c, d, e आणि f या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत, असे म्हणतात.

उदा (1) x ही संख्या 25 व 4 यांचा भूमितीमध्य आहे तर x ची किंमत काढा.

उकल : x हा 25 व 4 यांचा भूमितीमध्य आहे.

$\therefore x^2 = 25 \times 4$

$\therefore x^2 = 100$

$\therefore x = 10$

उदा (2) जर $4\,a^2b$, $8\,ab^2$, p परंपरित प्रमाणात असतील तर p ची किंमत काढा.

उकल : दिलेल्या माहितीवरून $4\,a^2b$, $8\,ab^2$, p परंपरित प्रमाणात आहेत.

$$\therefore \quad \frac{4a^2b}{8ab^2} = \frac{8ab^2}{p}$$

$$p = \frac{8ab^2 \times 8ab^2}{4a^2b} = 16b^3$$

उदा (3) 7, 12 आणि 18 या प्रत्येक संख्येतून कोणती संख्या वजा केली असता येणाऱ्या संख्या परंपरित प्रमाणात असतील ?

उकल : 7, 12 आणि 18 या प्रत्येक संख्येतून x ही संख्या वजा केली असता येणाऱ्या संख्या परंपरित प्रमाणात येतील असे मानू.

$(7-x)$, $(12-x)$, $(18-x)$ परंपरित प्रमाणात आहेत.

$$\therefore \quad (12-x)^2 = (7-x)(18-x)$$

$$\therefore \quad 144-24x + x^2 = 126 - 25x + x^2$$

$$\therefore \quad -24x + 25x = 126 - 144$$

$$\therefore \quad x = -18$$

पडताळा

$(7-x) = 7-(-18) = 25$

$(12-x) = 12-(-18) = 30$

$(18-x) = 18-(-18) = 36$

$302 = 900$ आणि $25 \times 36 = 900$

25, 30, 36 या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत.

$\therefore$ 7, 12, 18 मधून -18 वजा केल्यास येणाऱ्या संख्या परंपरित प्रमाणात असतील.

k – पद्धती (k –method)

गुणोत्तरातील k – पद्धती ही समान गुणोत्तरांवरील म्हणजेच प्रमाणावरील काही प्रश्न सोडवण्याची एक सोपी रीत आहे. या रीतीमध्ये दिलेल्या समान गुणोत्तरांपैकी प्रत्येकाची किंमत k मानतात.

उदा (1) जर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तर दाखवा की $\frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$

उकल : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ मानू $\therefore$ $a = bk$, $c = dk$

a आणि c च्या किमती दोन्ही बाजूंत ठेवून.

$$\text{डावी बाजू} = \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{5(bk)-3(dk)}{5b-3d} = \frac{k(5b-3d)}{(5b-3d)} = k$$

$$\text{उजवी बाजू} = \frac{7a-2c}{7b-2d} = \frac{7(bk)-2(dk)}{7b-2d} = \frac{k(7b-2d)}{7b-2d} = k$$

$\therefore$ डावी बाजू = उजवी बाजू.

$$\therefore \quad \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$$

उदा (2) जर a, b, c परंपरित प्रमाणात असतील, तर सिद्ध करा $\frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(b+c)^2}{bc}$

उकल : a, b, c हे परंपरित प्रमाणात आहेत. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ मानू.

$\therefore b = ck, a = bk = ck \times k = ck^2$

a आणि b च्या किमती घालून

डावी बाजू $= \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(ck^2+ck)^2}{(ck^2)(ck)} = \frac{c^2k^2(k+1)^2}{c^2k^3} = \frac{(k+1)^2}{k}$

उजवी बाजू $= \frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{(ck+c)^2}{(ck)c} = \frac{c^2(k+1)^2}{c^2k} = \frac{(k+1)^2}{k}$

$\therefore$ डावी बाजू = उजवी बाजू. $\therefore \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(b+c)^2}{bc}$

उदा (3) जर a, b, c परंपरित प्रमाणात असतील,

तर सिद्ध करा $\frac{a}{c} = \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

उकल : a, b, c परंपरित प्रमाणात आहेत. $\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

समजा, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \text{k}$ $\therefore b = ck$ आणि $a = ck^2$

डावी बाजू $= \frac{a}{c} = \frac{ck^2}{c} = k^2$

उजवी बाजू $= \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

$= \frac{(k^2c)^2+k^2c(ck)+(ck)^2}{(ck)^2+(ck)(c)+c^2}$

$= \frac{k^4c^2+k^3c^2+c^2k^2}{c^2k^2+c^2k+c^2}$

$= \frac{c^2k^2(k^2+k+1)}{c^2(k^2+k+1)}$

$= k^2$

$\therefore$ डावी बाजू = उजवी बाजू

$\therefore \frac{a}{c} = \frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

उदा (4) पाच संख्या परंपरित प्रमाणात असून पहिले पद 5 व शेवटचे पद 80 आहे. तर त्या संख्या काढा.

उकल : समजा, परंपरित प्रमाण असलेल्या पाच संख्या a, ak, ak^2, ak^3, ak^4 आहेत.

येथे $a = 5$ आणि $ak^4 = 80$

$\therefore 5 \times k^4 = 80$

$\therefore k^4 = 16$

$\therefore k = 2 \quad \because 2^4 = 16$

$ak = 5 \times 2 = 10 \qquad ak^2 = 5 \times 4 = 20$

$ak^3 = 5 \times 8 = 40 \qquad ak^4 = 5 \times 16 = 80$

$\therefore$ त्या संख्या 5, 10, 20, 40, 80 आहेत.

सरावसंच 4.5

(1) 12, 16 आणि 21 या प्रत्येक संख्येत कोणती संख्या मिळवली असता येणाऱ्या संख्या परंपरित प्रमाणात असतील ?

(2) $(23-x)$ व $(19-x)$ यांचे $(28-x)$ हे x चे मध्यम प्रमाणपद आहे, तर x ची किंमत काढा.

(3) तीन संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत. त्यांचे मध्यम प्रमाणपद 12 असून उरलेल्या दोन संख्यांची बेरीज 26 आहे, तर त्या संख्या काढा.

(4) जर $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$ तर a, b, c या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत हे दाखवा.

(5) जर $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ आणि $a, b, c > 0$ तर सिद्ध करा की,

(i) $(a + b + c)(b - c) = ab - c^2$

(ii) $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$

(iii) $\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a+c}{b}$

(6) $\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$ यांतील मध्यम प्रमाणपद काढा.

कृती : भूगोलाच्या पुस्तकातील भारताचा राजकीय नकाशा पाहा. त्यात दिलेले अंतराचे प्रमाण लक्षात घ्या. त्यावरून वेगवेगळ्या शहरांतील सरळ रेषेतील अंतरे काढा.

जसे, (i) नवी दिल्ली ते बंगळुरू (ii) मुंबई ते कोलकता (iii) जयपूर ते भुवनेश्वर

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

(1) खालील प्रश्नांसाठी बहुपर्यायी उत्तरांतील अचूक पर्याय निवडा.

(i) जर 6 : 5 = y : 20 तर y ची किंमत खालीलपैकी कोणती ?

(A) 15 (B) 24 (C) 18 (D) 22.5

(ii) 1 मिलिमीटरचे 1 सेंटिमीटरशी असलेले गुणोत्तर खालीलपैकी कोणते ?

(A) 1 : 100 (B) 10 : 1 (C) 1 : 10 (D) 100 : 1

(iii*) जतीन, नितीन व मोहसीन यांची वये अनुक्रमे 16, 24 व 36 वर्षे आहेत, तर नितीनच्या वयाचे मोहसीनच्या वयाशी असलेले गुणोत्तर कोणते ?

(A) 3 : 2 (B) 2 : 3 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

(iv) शुभम व अनिल यांना 3 : 5 या प्रमाणात 24 केळी वाटली, तर शुभमला मिळालेली केळी किती?

(A) 8 (B) 15 (C) 12 (D) 9

(v) 4 व 25 यांचे मध्यम प्रमाणपद खालीलपैकी कोणते?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

(2) खाली दिलेल्या संख्यांच्या जोड्यांमधील पहिल्या संख्येचे दुसऱ्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.

(i) 21, 48 (ii) 36, 90 (iii) 65, 117 (iv) 138, 161 (v) 114, 133

(3) पुढील गुणोत्तरे संक्षिप्त रूपात लिहा.

(i) वर्तुळाची त्रिज्या व व्यास यांचे गुणोत्तर.

(ii) आयताची लांबी 4 सेमी व रुंदी 3 सेमी असल्यास आयताच्या कर्णाचे लांबीशी असलेले गुणोत्तर.

(iii) चौरसाची बाजू 4 सेमी असल्यास चौरसाच्या परिमितीचे त्याच्या क्षेत्रफळाशी असलेले गुणोत्तर.

(4) पुढील संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत का ते ठरवा.

(i) 2, 4, 8 (ii) 1, 2, 3 (iii) 9, 12, 16 (iv) 3, 5, 8

(5) a, b, c या तीन संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत. जर $a = 3$ आणि $c = 27$ असेल तर $b =$ किती ?

(6) पुढील गुणोत्तरांचे शतमान रूपांतर करा.

(i) 37 : 500 (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{22}{30}$ (iv) $\frac{5}{16}$ (v) $\frac{144}{1200}$

(7) पहिल्या राशीचे दुसऱ्या राशीशी असलेले गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.

(i) 1024 MB, 1.2 GB [(1024 MB = 1 GB)]

(ii) 17 रुपये, 25 रुपये 60 पैसे (iii) 5 डझन, 120 नग

(iv) 4 चौमी, 800 चौसेमी (v) 1.5 किग्रॅ, 2500 ग्रॅम

(8) जर $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ तर पुढील राशींच्या किमती काढा.

(i) $\frac{4a+3b}{3b}$ (ii) $\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2}$

(iii) $\frac{a^3+b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7b-4a}{7b+4a}$

(9) a, b, c, d प्रमाणात असतील, तर सिद्ध करा.

(i) $\frac{11a^2+9ac}{11b^2+9bd} = \frac{a^2+3ac}{b^2+3bd}$

(ii*) $\sqrt{\frac{a^2+5c^2}{b^2+5d^2}} = \frac{a}{b}$

(iii) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

(10) a, b, c परंपरित प्रमाणात असतील, तर सिद्‌ध करा.

(i) $\frac{a}{a+2b}=\frac{a-2b}{a-4c}$ (ii) $\frac{b}{b+c}=\frac{a-b}{a-c}$

(11) सोडवा : $\frac{12x^2+18x+42}{18x^2+12x+58}=\frac{2x+3}{3x+2}$

(12) जर $\frac{2x-3y}{3z+y}=\frac{z-y}{z-x}=\frac{x+3z}{2y-3x}$ तर प्रत्येक गुणोत्तर $\frac{x}{y}$ आहे, हे सिद्‌ध करा.

(13*) जर $\frac{by+cz}{b^2+c^2}=\frac{cz+ax}{c^2+a^2}=\frac{ax+by}{a^2+b^2}$ तर $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ हे सिद्‌ध करा.

5 दोन चलांतील रेषीय समीकरणे

चला, शिकूया.

- दोन चलांतील रेषीय समीकरणे
- एकसामायिक समीकरणे
- एकसामयिक समीकरणे सोडविणे
- एकसामायिक समीकरणांवरील शाब्दिक उदाहरणे

जरा आठवूया.

उदा. खालील समीकरणे सोडवा.

(1) $m+3=5$ $m = \square$

(2) $3y+8=22$ $y = \square$

(3) $\frac{x}{3}=2$ $x = \square$

(4) $2p = p+\frac{4}{9}$ $p = \square$

(5) कोणत्या संख्येत 5 मिळवल्यास 14 ही संख्या मिळेल ?

$\square + 5 = 14$

$x + 5 = 14$

$x = \square$

(6) 8 मधून किती वजा केल्यास 2 उरतील ?

$8 - \square = 2$

$8 - y = 2$

$y = \square$

वरील प्रत्येक समीकरणात चलाचा घातांक 1 आहे. या समीकरणांना एका चलातील रेषीय समीकरणे म्हणतात.

जाणून घेऊया.

दोन चलांतील रेषीय समीकरणे (Linear equations in two variables)

ज्या दोन संख्यांची बेरीज 14 आहे, अशा संख्या शोधा.

संख्यांसाठी x व y ही चले वापरून हे उदाहरण समीकरण रूपात $x + y = 14$ असे होईल.

हे दोन चलांतील समीकरण आहे. येथे x आणि y या दोन्ही चलांच्या अनेक किमती शोधता येतात.

जसे, $9 + 5 = 14$ $7 + 7 = 14$ $8 + 6 = 14$ $4 + 10 = 14$

$(-1) + 15 = 14$ $15 + (-1) = 14$ $2.6 + 11.4 = 14$ $0 + 14 = 14$

$100 + (-86) = 14$ $(-100) + (114) = 14$ $\square + \square = 14$ $\square + \square = 14$

म्हणजे वरील समीकरणांच्या $(x = 9, y = 5)$ $(x = 7, y = 7)$ $(x = 8, y = 6)$ इत्यादी अनेक उकली मिळतात.

$x = 9$, $y = 5$ ही उकल (9, 5) अशा क्रमाने कंसात लिहिण्याचा संकेत आहे. या जोडीतील पहिली संख्या x ची किंमत व दुसरी संख्या y ची किंमत असते. $x + y = 14$ हे समीकरण सत्य ठरवणाऱ्या (9,5), (7,7), (8,6), (4,10), (10,4), (−1,15), (2.6, 11.4), ... अशा अनंत क्रमित जोड्या म्हणजे अनंत उकली आहेत.

आता दुसरे उदाहरण पाहा.

अशा दोन संख्या शोधा की ज्यांची वजाबाकी 2 आहे.

मोठी संख्या x व लहान संख्या y मानल्यास $x-y = 2$ हे समीकरण मिळेल.

x आणि y किंमतींसाठी पुढीलप्रमाणे अनेक समीकरणे मिळतील.

$10 - 8 = 2$ $\quad 9 - 7 = 2$ $\quad 8 - 6 = 2$ $\quad (-3) - (-5) = 2$ $\quad 5.3-3.3=2$

$15 - 13 = 2$ $\quad 100 - 98 = 2$ $\quad \square - \square = 2$ $\quad \square - \square = 2$

येथे $x = 10$ आणि $y = 8$ या किंमती घेतल्या तर (10,8) ही क्रमित जोडी या समीकरणाचे समाधान करते म्हणजे ही जोडी या समीकरणाची उकल आहे. (10, 8) ही जोडी (8, 10) अशी लिहून चालणार नाही. कारण (8, 10) याचा अर्थ $x = 8$, $y = 10$ असा आहे. या किमतींनी $x-y = 2$ या समीकरणाचे समाधान होत नाही. यावरून जोडीतील संख्यांचा क्रम महत्त्वाचा असतो, हे नीट लक्षात घ्या.

आता $x-y = 2$ या समीकरणाच्या उकली क्रमित जोड्यांच्या रूपात लिहू.

(7, 5), (−2, −4), (0, −2), (5.2, 3.2), (8, 6) इत्यादी अनंत उकली आहेत.

$4m - 3n = 2$ या समीकरणाच्या उकली काढा.

तुम्हीही अशी तीन वेगवेगळी समीकरणे तयार करा व त्यांच्या उकली शोधा.

आता पहिली दोन समीकरणे पाहा.

$x + y = 14$ I

$x - y = 2$ II

समीकरण I च्या उकली (9, 5), (7, 7), (8, 6)...

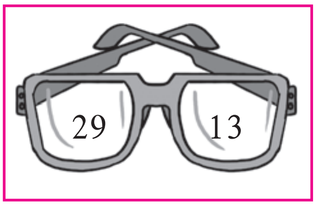
समीकरण II च्या उकली (7, 5), (−2, −4), (0, −2), (5.2, 3.2), (8, 6)...

(8, 6) ही जोडी उकलींच्या दोन्ही समूहांत सामाईक आहे. ही जोडी दोन्ही समीकरणांचे समाधान करते. म्हणून ती दोन्ही समीकरणांची सामाईक उकल आहे.

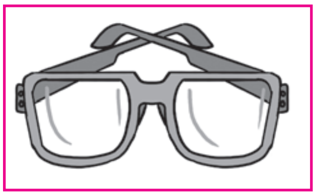
हे लक्षात ठेवूया.

जेव्हा दोन चलांतील दोन रेषीय समीकरणांचा एकाच वेळी विचार करून त्यांची सामाईक उकल मिळते तेव्हा त्या समीकरणांना **एकसामयिक समीकरणे** (Simultaneous equations) म्हणतात.

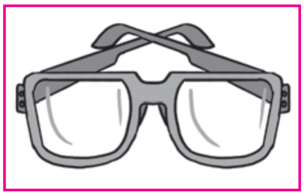
कृती : खाली दिलेल्या चश्म्यांच्या काचांवर अशा संख्या लिहा की,



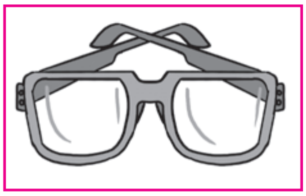
(i) ज्यांची बेरीज 42 आणि वजाबाकी 16 आहे.



(ii) ज्यांची बेरीज 37 आणि वजाबाकी 11 आहे.



(iii) ज्यांची बेरीज 54 आणि वजाबाकी 20 आहे.



(iv) ज्यांची बेरीज.. आहे आणि वजाबाकी.. आहे.

विचार करूया.

$x+y = 5$ आणि $2x + 2y = 10$ ही दोन चलांतील दोन समीकरणे आहेत.

$x+y = 5$ या समीकरणाच्या वेगवेगळ्या पाच उकली शोधा. त्याच उकलींनी $2x + 2y = 10$ या समीकरणाचेही समाधान होते का हे तपासा.

या दोन्ही समीकरणांचे निरीक्षण करा.

दोन चलांतील दोन समीकरणांच्या सर्व उकली समान असणे यासाठी आवश्यक असणारी अट मिळते का ते पाहा.

जाणून घेऊया.

चलाचा लोप करून एकसामायिक समीकरण सोडवण्याची पद्धत (Elimination method)

$x + y = 14$ आणि $x - y = 2$ हे एकसामायिक समीकरण चलांना किंमती देऊन आपण सोडवले. परंतु प्रत्येक वेळी ही रीत सोईची होईल असे नाही. उदाहरणार्थ, $2x + 3y = -4$ आणि $x - 5y = 11$ हे समीकरण x व y यांना वेगवेगळ्या किमती देऊन सोडवण्याचा प्रयत्न करून पाहा. या रीतीने उकल मिळवणे सोपे नाही हे तुमच्या लक्षात येईल.

म्हणून एकसामायिक समीकरण सोडवण्यासाठी वेगळी पद्धत वापरली जाते. या पद्धतीत दोनपैकी एका चलाचा लोप करून एका चलातील रेषीय समीकरण मिळवतात. त्यावरून त्या चलाची किंमत काढतात. ही किंमत दिलेल्यापैकी कोणत्याही समीकरणात मांडली की दुसऱ्या चलाची किंमत मिळते.

ही पद्धत समजण्यासाठी पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा (1) सोडवा : $x + y = 14$ आणि $x - y = 2$.

उकल : दोन्ही समीकरणांची बेरीज करून एका चलातील समीकरण मिळवू.

$$x + y = 14 \quad \text{.........I}$$
$$+ \quad x - y = 2 \quad \text{.........II}$$
$$2x + 0 = 16$$
$$2x = 16$$
$$x = 8$$

$x = 8$ ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू.

$$x + y = 14$$
$$\therefore 8 + y = 14$$
$$\therefore y = 6$$

येथे (8, 6) ही पहिल्या समीकरणाची उकल आहे. हीच उकल दुसऱ्या समीकरणाचीही आहे याचा पडताळा घेऊ.

$x - y = 8 - 6 = 2$ हे सत्य आहे.

(8,6) ही दिलेल्या दोन्ही समीकरणांची सामाईक उकल आहे.

म्हणजेच $x + y = 14$ आणि $x - y = 2$ या एकसामयिक समीकरणांची (8, 6) ही उकल आहे.

उदा (2) आई व मुलगा यांच्या वयांची बेरीज 45 आहे. आईच्या वयाच्या दुपटीतून मुलाचे वय वजा केले तर वजाबाकी 54 येते, तर त्या दोघांची वये काढा.

दिलेली माहिती चलाचा उपयोग करून लिहिली की, उदाहरण सोडवणे सोपे जाते.

उकल : आईचे आजचे वय x वर्षे व मुलाचे आजचे वय y वर्षे मानू.

पहिल्या अटीनुसार $x+y = 45$ I

दुसऱ्या अटीनुसार $2x-y = 54$ II

समीकरण (I) व (II) यांची बेरीज करून

$$3x+0 = 99$$
$$3x = 99$$
$$x = 33$$

$x = 33$ ही किंमत पहिल्या समीकरणात घालू

$$33+y = 45$$
$$y = 45-33$$
$$y = 12$$

$x=33$ व $y = 12$ ही उकल दुसऱ्या समीकरणाचे समाधान करते. याचा पडताळा घ्या.

आईचे आजचे वय 33 वर्षे व मुलाचे वय 12 वर्षे आहे.

दोन चलांतील रेषीय समीकरणांचे सामान्यरूप

$ax + by + c = 0$ या समीकरणात a, b, c या वास्तव संख्या असतील आणि a व b एकाच वेळी 0 नसतील तर हे समीकरण दोन चलांतील रेषीय समीकरणाचे सामान्य रूप असते.

या समीकरणात दोन्ही चलांचा घातांक 1 आहे. हे समीकरण रेषीय आहे.

उदा (1) खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा

$$3x + y = 5 \text{ .... (I)}$$

$$2x + 3y = 1 \text{ ....(II)}$$

येथे एका चलाचा लोप करण्यासाठी दोन्ही समीकरणांतील एकाही चलाचा सहगुणक समान किंवा विरुद्ध संख्या नाही. तो समान करून घेऊ.

समीकरण I च्या दोन्ही बाजूंना 3 ने गुणू.

$$\therefore \quad 3x \times 3 + 3 \times y = 5 \times 3$$

$$\therefore \quad 9x + 3y = 15 \quad \text{.......(III)}$$

$$2x + 3y = 1 \quad \text{.......(II)}$$

आता समीकरण II हे समीकरण III मधून वजा करू

$$9x + 3y = 15$$

$$\underset{-}{+}\, 2x \underset{-}{+} 3y \underset{-}{=} 1$$

$$7x = 14$$

$$x = 2$$

$x = 2$ ही किंमत कोणत्याही समीकरणात ठेवू.

$$2x + 3y = 1$$

$$\therefore \quad 2 \times 2 + 3y = 1$$

$$\therefore \quad 4 + 3y = 1$$

$$\therefore \quad 3y = -3$$

$$\therefore \quad y = -1$$

येथे $(2, -1)$ ही उकल दुसऱ्या समीकरणासाठीही सत्य आहे, हे पडताळा.

उदा (2) खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

$$3x - 4y - 15 = 0 \text{ .... (I)}$$

$$y + x + 2 = 0 \text{ ....(II)}$$

दोन्ही समीकरणे स्थिरांक उजवीकडे घेऊन लिहू.

$$3x - 4y = 15 \text{ ....(I)}$$

$$x + y = -2 \text{ .... (II)}$$

y चलाचा लोप करण्यासाठी समीकरण II ला 4 ने गुणू व समीकरण I मध्ये ते मिळवू.

$$3x - 4y = 15$$

$$+ \quad 4x + 4y = -8$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

$x = 1$ ही किंमत समीकरण II मध्ये ठेवू.

$$x + y = -2$$

$$\therefore 1 + y = -2$$

$$\therefore y = -2 - 1$$

$$\therefore y = -3$$

$(1, -3)$ ही उकल आहे. ही उकल समीकरण I साठी सुद्धा सत्य आहे, हे पडताळा.

विचार करूया.

$3x - 4y - 15 = 0$ आणि $y + x + 2 = 0$ हीच समीकरणे x या चलाचा लोप करून सोडवता येतील का? त्याची उकल तीच येईल का?

जाणून घेऊया.

एका चलाची किंमत दुसऱ्या चलाच्या रूपात ठेवून चलाचा लोप करणे (Substitution method)

चलाचा लोप करण्याची आणखी एक पद्धत आहे. समीकरणातील एका चलाची किंमत दुसऱ्या चलाच्या रूपात काढून ती दुसऱ्या समीकरणात ठेवून पहिल्या चलाचा लोप करता येतो. ही पद्धत पुढील उदाहरणांतून समजावून घेऊ.

उदा (1) सोडवा : $8x + 3y = 11$; $3x - y = 2$

उकल : $8x + 3y = 11$.................. (I)

$3x - y = 2$.......................(II)

समीकरण (II) मध्ये y ची किंमत x चलात मांडणे सोपे होईल.

$3x - y = 2$

$3x - 2 = y$

आता $y = 3x - 2$ ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू.

$8x + 3y = 11$

$\therefore\ 8x + 3(3x-2) = 11$

$\therefore\ 8x + 9x - 6 = 11$

$\therefore\ 17x - 6 = 11$

$\therefore\ 17x = 11 + 6 = 17$

$\therefore\ x = 1$

x ची ही किंमत $y = 3x - 2$ यात ठेवू.

$\therefore\ y = 3 \times 1 - 2$

$\therefore\ y = 1$

$\therefore$ (1, 1) ही या समीकरणांची उकल आहे.

उदा (2) सोडवा. $3x - 4y = 16$; $2x - 3y = 10$

उकल : $3x - 4y = 16$.........(I)

$2x - 3y = 10$............(II)

समी. I वरून x या चलाची किंमत y च्यारूपात मांडू.

$3x - 4y = 16$

$3x = 16 + 4y$

$x = \frac{16+4y}{3}$

x ची ही किंमत समीकरण (II) मध्ये ठेवू.

$2x - 3y = 10$

$2\left(\frac{16+4y}{3}\right) - 3y = 10$

$\frac{32+8y}{3} - 3y = 10$

$\frac{32+8y-9y}{3} = 10$

$32 + 8y - 9y = 30$

$32 - y = 30 \qquad \therefore\ y = 2$

आता $y = 2$ ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवून

$3x - 4y = 16$

$\therefore\ 3x - 4 \times 2 = 16$

$\therefore\ 3x - 8 = 16$

$\therefore\ 3x = 16 + 8$

$\therefore\ 3x = 24$

$\therefore\ x = 8$

$\therefore\ x = 8$ व $y = 2$

$\therefore$ (8, 2) ही या समीकरणांची उकल आहे.

सरावसंच 5.1

(1) x आणि y या चलांचा उपयोग करून दोन चलांतील 5 रेषीय समीकरणे लिहा.

(2) $x + y = 7$ या समीकरणाच्या 5 उकली लिहा.

(3) खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

(i) $x + y = 4$; $2x - 5y = 1$ (ii) $2x + y = 5$; $3x-y = 5$

(iii) $3x-5y=16$; $x-3y=8$ (iv) $2y-x=0$; $10x + 15y = 105$

(v) $2x + 3y+4 = 0$; $x- 5y = 11$ (vi) $2x - 7y = 7$; $3x + y = 22$

जाणून घेऊया.

एकसामयिक समीकरणांवरील शाब्दिक उदाहरणे

शाब्दिक उदाहरणे सोडवताना दिलेल्या माहितीवरून समीकरण तयार करणे हा एक अत्यंत महत्त्वाचा टप्पा आहे. समीकरणाची उकल काढण्याची प्रणाली पुढील पायऱ्यांमधून दाखविली आहे.

पायऱ्या	उदाहरण
शाब्दिक उदाहरण काळजीपूर्वक वाचून समजून घ्या.	दोन संख्यांची बेरीज 36 आहे एका संख्येच्या आठ पटींतून 9 वजा केले असता दुसरी संख्या मिळते.
↓	↓
उदाहरणातील माहितीवरून राशींसाठी चले वापरा.	पहिली संख्या = x मानू. दुसरी संख्या = y मानू.
↓	↓
चले वापरून विधाने गणिती भाषेत लिहा.	संख्यांची बेरीज 36 $\therefore x + y = 36$ लहान संख्येची 8 पट = $8x$ लहान संख्येची 8 पट – 9 = $8x - 9$ $\therefore$ मोठी संख्या = $y = 8x - 9$
↓	↓
योग्य पद्धतींचा उपयोग करून समीकरणे सोडवा.	$x + y = 36$ $\therefore 8x - y = 9$ $\therefore 9x = 45$ $\therefore x = 5$ $\therefore 5 + y = 36$ $\therefore y = 36 - 5$ $\therefore y = 31$
↓	↓
उकल मिळवा.	$x = 5,\ y = 31$
↓	↓
आलेले उत्तर समीकरणात ठेवून पडताळा घ्या.	$31 + 5 = 36$ ....(I) $31 = 8 \times 5 - 9$ ....(II)
↓	↓
उत्तर लिहा.	$\therefore$ त्या संख्या 5 व 31 आहेत.

शाब्दिक उदाहरणे

आता आपण विविध प्रकारच्या शाब्दिक उदाहरणांचा विचार करू.

(1) वयांशी निगडित उदाहरणे

(2) संख्यांशी निगडित उदाहरणे

(3) अपूर्णांकांवर आधारित उदाहरणे

(4) आर्थिक व्यवहारांवर आधारित उदाहरणे

(5) भौमितिक आकृत्यांच्या गुणधर्मांवर आधारित उदाहरणे

(6) वेग, अंतर, वेळ यांवर आधारित उदाहरणे

उदा (1) दोन संख्यांची बेरीज 103 आहे. जर मोठ्या संख्येला लहान संख्येने भागले तर भागाकार 2 येतो व बाकी 19 उरते, तर त्या संख्या शोधा.

उकल : पायरी 1 : शाब्दिक उदाहरण समजावून घेणे.

पायरी 2 : शोधण्याच्या संख्यांसाठी अक्षरे मानणे.

तसेच भाज्य = भाजक × भागाकार + बाकी हा नियम लक्षात घेणे.

मोठी संख्या x मानू व लहान संख्या y मानू.

पायरी 3 : दिलेली माहिती : संख्यांची बेरीज = 103

म्हणून $x + y = 103$ हे एक समीकरण मिळाले.

मोठ्या संख्येला लहान संख्येने भागल्यास भागाकार 2 येतो, बाकी 19 उरते म्हणून

$x = 2 \times y + 19$ ...(भाज्य = भाजक × भागाकार + बाकी)

म्हणजेच $x - 2y = 19$ हे दुसरे समीकरण मिळते.

पायरी 4 : आता तयार समीकरणांची उकल काढू.

$$x + y = 103 \quad \text{................(I)}$$
$$x - 2y = 19 \quad \text{................(II)}$$

समीकरण (I) मधून समीकरण (II) वजा करू.

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 103 \\ x - 2y & = & 19 \\ - \quad + & & - \\ \hline 0 + 3y & = & 84 \\ \therefore \quad y & = & 28 \end{array}$$

पायरी 5 : $x + y = 103$ या समीकरणात y ची किंमत ठेवू.

$\therefore \quad x + 28 = 103$

$\therefore \quad x = 103 - 28$

$\therefore \quad x = 75$

पायरी 6 : दिलेल्या संख्या 75 व 28 आहेत.

उदा (2) सलीलचे वय संग्रामच्या वयाच्या निम्म्यापेक्षा 23 वर्षांनी जास्त आहे. पाच वर्षांपूर्वी त्यांच्या वयांची बेरीज 55 वर्षे होती, तर त्यांची आजची वये काढा.

उकल : सलीलचे आजचे वय x मानू व संग्रामचे आजचे वय y मानू.

सलीलचे वय संग्रामच्या वयाच्या निम्म्यापेक्षा 23 ने जास्त आहे, म्हणून $x = \frac{y}{2} + \square$

पाच वर्षांपूर्वीचे सलीलचे वय = $x - 5$. पाच वर्षांपूर्वीचे संग्रामचे वय = $y - 5$

पाच वर्षांपूर्वीची त्यांच्या वयांची बेरीज = 55

$\square + \square = 55$

समीकरणे सोडवून उकल काढणे.

$2x = y + 46$ $\quad$ $2x - y = 46$ ....(I)

$(x - 5) + (y - 5) = 55$

$x + y = 65$ ....(II)

समीकरण (I) व समीकरण (II) यांची बेरीज करू.

$$\begin{aligned} 2x - y &= 46 \\ + \quad x + y &= 65 \\ \hline \therefore 3x &= 111 \\ \therefore x &= 37 \end{aligned}$$

$x = 37$ ही किंमत समीकरण (II) मध्ये ठेवू.

$$\begin{aligned} x + y &= 65 \\ \therefore 37 + y &= 65 \\ \therefore y &= 65 - 37 \\ \therefore y &= 28 \end{aligned}$$

सलीलचे आजचे वय 37 वर्षे आहे व संग्रामचे आजचे वय 28 वर्षे आहे.

उदा (3) एक दोन अंकी संख्या तिच्या अंकांच्या बेरजेच्या चौपट आहे. तिच्या अंकांची अदलाबदल केल्यास मिळणारी संख्या ही मूळच्या संख्येच्या दुपटीपेक्षा 9 ने कमी आहे, तर ती संख्या शोधा.

उकल : मूळच्या संख्येतील एककस्थानचा अंक x आणि दशकस्थानचा अंक y मानू.

	दशकस्थानचा अंक	एककस्थानचा अंक	संख्या	अंकाची बेरीज
मूळच्या संख्येसाठी	y	x	$10y + x$	$y + x$
अंकांची अदलाबदल केल्यावर मिळणाऱ्या संख्येसाठी	x	y	$10x + y$	$x + y$

पहिल्या अटीनुसार $\quad 10y + x = 4(y + x)$

$\therefore 10y + x = 4y + 4x$

$\therefore x - 4x + 10y - 4y = 0$

$\therefore -3x + 6y = 0$ $\quad$ $\therefore -3x = -6y$ $\quad$ $\therefore x = 2y$ .....(I)

दुसऱ्या अटीनुसार $10x + y = 2(10y+x)-9$

$10x+y = 20y + 2x-9$

$10x-2x+y-20y = -9$

$8x - 19y = -9$ ....(II)

$x = 2y$ ....(I)

$x = 2y$ ही किंमत समीकरण (II) मध्ये ठेवून.

$16y - 19y = -9$ ....(I)

$\therefore \; - 3y = -9$

$\therefore \; y = 3$

$y = 3$ ही किंमत समीकरण (I) मध्ये ठेवू. $x - 2y = 0$

$x - 2 \times 3 = 0$ $\therefore \; x - 6 = 0$ $\therefore \; x = 6$

मूळची दोन अंकी संख्या : $10y + x = 10 \times 3 + 6$

$= 36$

उदा (4) एका गावाची लोकसंख्या 50,000 होती. एका वर्षात पुरुषांची संख्या 5% ने वाढली व स्त्रियांची संख्या 3% ने वाढली. त्यामुळे या वर्षी लोकसंख्या 52,020 झाली. तर गेल्या वर्षी त्या गावात पुरुष किती होते व स्त्रिया किती होत्या ?

उकल : आधीच्या वर्षी गावातील पुरुषांची संख्या x व स्त्रियांची संख्या y होती असे मानू.

पहिल्या अटीनुसार $\square + \square = 50000$ ....(I)

पुरुषांची संख्या 5% ने वाढली. पुरुषांची संख्या $\frac{\square}{\square}x$ झाली.

स्त्रियांची संख्या 3% ने वाढली. स्त्रियांची संख्या $\frac{\square}{\square}y$ झाली.

दुसऱ्या अटीनुसार $\frac{\square}{\square}x + \frac{\square}{\square}y = 52020$

$\square x + \square y = 5202000$ ....(II)

समीकरण (I) ला 103 ने गुणू.

$\square x + \square y = 5150000$ ....(III)

समीकरण (II) मधून समीकरण (III) वजा करू.

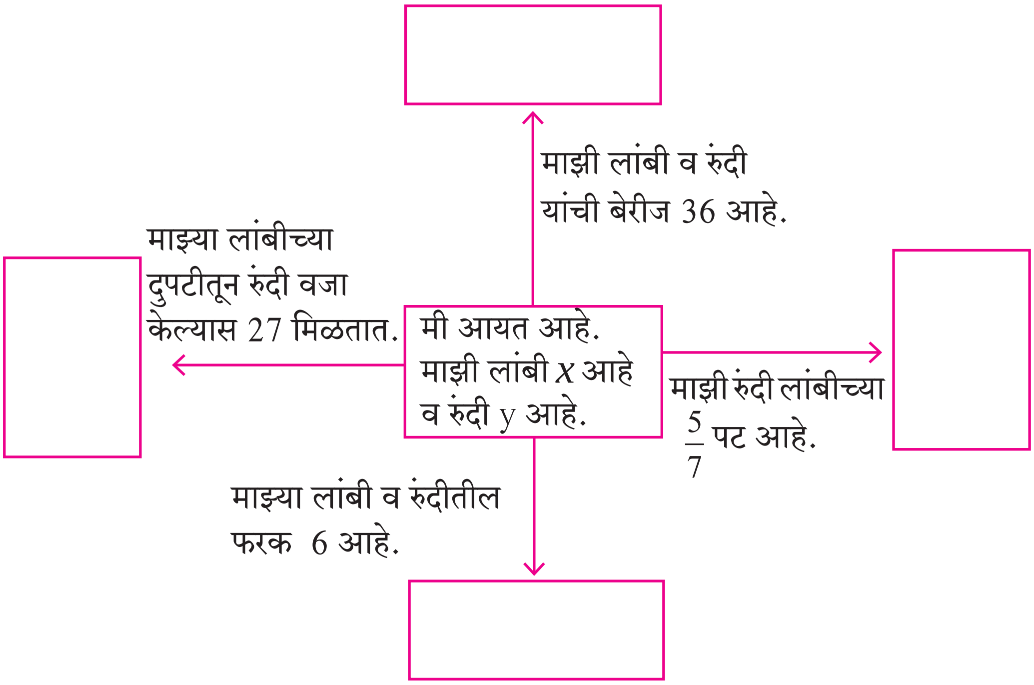
$2x = 5202000 - 5150000$

$2x = 52000$

$\therefore$ पुरुषांची संख्या $= x = \square$ $\therefore$ स्त्रियांची संख्या $= y = \square$

कृती I : पुढे दिलेल्या आकृतीत बाणाजवळ काही सूचना लिहिल्या आहेत. त्यावरून मिळणारे समीकरण बाणांपुढील चौकटींत लिहा. चौकटींतील कोणतीही दोन समीकरणे घेऊन त्या समीकरणांची उकल काढा. उकलींचा पडताळा घ्या.

यांपैकी कोणत्याही दोन समीकरणांची एक जोडी, अशा किती जोड्या मिळतील? त्यांच्या उकलींवर चर्चा करा.



सराव संच 5.2

(1) एका पाकिटात काही 5 रुपयांच्या व काही 10 रुपयांच्या नोटा आहेत. नोटांची एकूण किंमत 350 रु. आहे. 5 रुपयांच्या नोटांची संख्या 10 रुपयांच्या नोटांच्या संख्येच्या दुपटीपेक्षा 10 ने कमी आहे, तर पाकिटात 5 रुपयांच्या व 10 रुपयांच्या किती नोटा आहेत?

(2) एका अपूर्णांकाचा छेद अंशाच्या दुपटीपेक्षा 1 ने जास्त आहे. अंश व छेद यांत प्रत्येकी 1 मिळवल्यास अंशाचे छेदाशी असलेले गुणोत्तर 1 : 2 होते, तर तो अपूर्णांक काढा.

(3) प्रियांका व दीपिका यांच्या वयांची बेरीज 34 वर्षे आहे. प्रियांका दीपिकापेक्षा 6 वर्षांनी मोठी आहे, तर त्यांची वये काढा.

(4) एका प्राणिसंग्रहालयात सिंह आणि मोर यांची एकूण संख्या 50 आहे. त्यांच्या पायांची एकूण संख्या 140 आहे, तर प्राणिसंग्रहालयातील सिंहांची व मोरांची संख्या काढा.

(5) संजयला नोकरीमध्ये काही मासिक पगार मिळतो. दरवर्षी त्याच्या पगारामध्ये निश्चित रकमेची वाढ होते. जर चार वर्षांनी त्याचा मासिक पगार 4,500 रुपये झाला व 10 वर्षांनी मासिक पगार 5,400 रुपये झाला, तर त्याचा सुरुवातीचा पगार व वार्षिक वाढीची रक्कम काढा.

(6) 3 खुर्च्या व 2 टेबलांची किंमत 4500 रुपये आहे. 5 खुर्च्या व 3 टेबलांची किंमत 7000 रुपये आहे, तर 2 खुर्च्या व 2 टेबलांची किंमत काढा.

(7) एका दोन अंकी संख्येतील अंकांची बेरीज 9 आहे. जर अंकांची अदलाबदल केली तर मिळणारी संख्या ही आधीच्या संख्येपेक्षा 27 ने मोठी आहे, तर ती दोन अंकी संख्या काढा.

(8*) Δ ABC मध्ये कोन A चे माप हे $\angle$ B व $\angle$ C या कोनांच्या मापांच्या बेरजेएवढे आहे. तसेच $\angle$ B व $\angle$ C यांच्या मापांचे गुणोत्तर 4:5 आहे. तर त्या त्रिकोणाच्या कोनांची मापे काढा.

(9*) एका 560 सेमी लांबीच्या दोरीचे दोन तुकडे असे करायचे आहेत, की लहान तुकड्याच्या लांबीची दुप्पट ही मोठ्या तुकड्याच्या लांबीच्या $\frac{1}{3}$ पट आहे, तर मोठ्या तुकड्याची लांबी काढा.

(10) एका स्पर्धा परीक्षेत 60 प्रश्न होते. प्रत्येक प्रश्नांच्या बरोबर उत्तराकरिता 2 गुण आणि चुकीच्या उत्तराकरिता ऋण एक गुण देण्यात येणार होता. यशवंतने सर्व 60 प्रश्न सोडवले तेव्हा त्याला 90 गुण मिळाले, तर त्याची किती प्रश्नांची उत्तरे चुकली होती ?

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

(1) खालीलपैकी योग्य पर्याय निवडा.

(i) $3x + 5y = 9$ आणि $5x + 3y = 7$ तर $x + y$ ची किंमत खालीलपैकी कोणती आहे ?

(A) 2 (B) 16 (C) 9 (D) 7

(ii) आयताच्या लांबीतून व रुंदीतून 5 वजा केले तर त्याची परिमिती 26 येते. या माहितीचे गणिती भाषेतील रूपांतर खालीलपैकी कोणते ?

(A) $x - y = 8$ (B) $x + y = 8$ (C) $x + y = 23$ (D) $2x + y = 21$

(iii) अजय हा विजयपेक्षा 5 वर्षांनी लहान आहे. त्या दोघांच्या वयाची बेरीज 25 आहे, तर अजयचे वय किती ?

(A) 20 (B) 15 (C) 10 (D) 5

(2) खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

(i) $2x + y = 5$; $3x - y = 5$ (ii) $x - 2y = -1$; $2x - y = 7$

(iii) $x + y = 11$; $2x - 3y = 7$ (iv) $2x + y = -2$; $3x - y = 7$

(v) $2x - y = 5$; $3x + 2y = 11$ (vi) $x - 2y = -2$; $x + 2y = 10$

(3) चलाचे सहगुणक समान करून खालील समीकरणे सोडवा.

(i) $3x-4y=7$; $5x+2y=3$ (ii) $5x + 7y=17$; $3x-2y=4$

(iii) $x-2y= -10$; $3x-5y= -12$ (iv) $4x + y=34$; $x+4y= 16$

(4) खालील एकसामयिक समीकरणे सोडवा.

(i) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=4$; $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$ (ii) $\frac{x}{3}+5y=13$; $2x+\frac{y}{2}=19$

(iii) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$; $\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$

(5*) एक दोन अंकी संख्या, त्या संख्येतील अंकांच्या बेरजेच्या चौपटीपेक्षा 3 ने मोठी आहे. जर त्या संख्येमध्ये 18 मिळवले तर येणारी बेरीज ही मूळ संख्येतील अंकांची अदलाबदल करून येणारी संख्या मिळते, तर ती संख्या काढा.

(6) 6 पुस्तके व 7 पेन यांची एकूण किंमत 79 रुपये आहे आणि 7 पुस्तके व 5 पेन यांची एकूण किंमत 77 रुपये आहे, तर एक पुस्तक व दोन पेन यांची किंमत काढा.

(7*) दोन व्यक्तींच्या उत्पन्नांचे गुणोत्तर 9:7 आहे व त्यांच्या खर्चांचे गुणोत्तर 4:3 आहे. प्रत्येकाची बचत 200 रुपये असेल तर प्रत्येकाचे उत्पन्न काढा.

(8*) एका आयताची लांबी 5 एककाने कमी केली व रुंदी 3 एककाने वाढवली तर त्याचे क्षेत्रफळ 9 चौरस एककाने कमी होते. जर लांबी 3 एककाने कमी केली व रुंदी 2 एककाने वाढवली तर त्याचे क्षेत्रफळ 67 चौरस एककाने वाढते, तर आयताची लांबी व रुंदी काढा.

(9*) एका रस्त्यावरील A व B या दोन ठिकाणांमधील अंतर 70 किमी आहे. एक कार A ठिकाणाहून व दुसरी कार B या ठिकाणाहून निघते. जर त्या एकाच दिशेने निघाल्या तर एकमेकींना 7 तासात भेटतात व विरुद्ध दिशेने निघाल्यास 1 तासात भेटतात, तर त्यांचे वेग काढा.

(10*) एक दोन अंकी संख्या व त्या संख्येतील अंकांची अदलाबदल करून येणारी संख्या यांची बेरीज 99 आहे, तर ती संख्या काढा.

कृती : अपूर्णांक शोधा.

$$\frac{\text{अंश } x}{\text{छेद } y}$$

अपूर्णांकाच्या अंशाला 3 ने गुणले व छेदातून 3 वजा केले तर मिळणारा अपूर्णांक $\frac{18}{11}$ आहे.

↓ समीकरण I

$11x - 6y + 18 = 0$

अपूर्णांकाचा अंश 8 ने वाढवला आणि छेद दुप्पट केला तर मिळणारा अपूर्णांक $\frac{1}{2}$ आहे.

↓ समीकरण II

$x - y + 8 = 0$

$\therefore$ दिलेला अपूर्णांक = $\frac{\square}{\square}$

आलेल्या उत्तराचा पडताळा घ्या.

6 अर्थनियोजन

चला, शिकूया.

- अर्थनियोजनाची ओळख
- बचत व गुंतवणूक
- कररचना
- आयकर-गणन

चला, चर्चा करूया.

अनघा : आपण कॉम्प्युटर विकत घ्यायचा का?
आई : हो, घेऊया पण पुढच्या वर्षी घेऊया.
अनघा : या वर्षी का नको?
आई : त्याची किंमत काही कमी नसते.
अनघा : म्हणजे पैसे साठवायला हवेत, असेच ना?
आई : हो.

आपल्या आजूबाजूला अशा प्रकारचे अनेक संवाद कानांवर पडतात.

प्रत्येक व्यक्तीला विविध गरजा भागवण्यासाठी पैशांची गरज असते. त्यामुळेच वर्तमानातील आवश्यक गरजा पूर्ण करून इतर गरजा भागवण्यासाठी प्रत्येकजण पैसे साठवण्याचा प्रयत्न करतो. त्यालाच आपण 'बचत' करणे असे म्हणतो. ही बचत सुरक्षित राहून तिच्यात वाढ होण्यासाठी ती आपण 'ठेव' म्हणून ठेवतो किंवा जमीन, घर यांसारख्या स्थावर बाबी खरेदी करतो. यालाच 'गुंतवणूक करणे' असे म्हणतात.

प्रत्येक गुंतवणूकदार आवश्यक तेवढी रक्कम खर्च करतो आणि उरलेल्या रकमेची बचत करतो, तसेच बचत केलेल्या रकमेची विचारपूर्वक गुंतवणूकही करतो. याला '**अर्थनियोजन**' म्हणतात. संपत्तीची वृद्धी आणि सुरक्षितता हे अर्थनियोजनाचे मुख्य प्रयोजन असते.

प्रत्येकाच्या आयुष्यात येणाऱ्या अपेक्षित व अनपेक्षित घटनांकरिता तरतूद म्हणून अर्थनियोजनाचा उपयोग होतो. काही उदाहरणे पुढे दिली आहेत.

अपेक्षित घटना

(1) मुलांचे शिक्षण व त्यांच्यासाठी इतर खर्च
(2) व्यवसायासाठी भांडवल
(3) वाहन खरेदी
(4) घराचे बांधकाम किंवा खरेदी
(5) वृद्धापकाळातील गरजा

अनपेक्षित घटना

(1) नैसर्गिक आपत्ती
(2) कुटुंबातील एखाद्या सदस्याचे आजारपण
(3) अपघातामुळे झालेले नुकसान
(4) आकस्मिक मृत्यू

अर्थनियोजन का करावे याचे उत्तर वरील घटना किंवा इतरही काही कारणे यांमधून मिळते. अर्थनियोजन करताना काही बाबी लक्षात ठेवणे गरजेचे असते.

जाणून घेऊया.

बचत (Savings)

(1) बचत सुरक्षित राहणे व तिच्यात वाढ होणे हिताचे असते. आपली बचत केलेली रक्कम बँकेत किंवा पोस्टात सुरक्षित राहते. बँकेतील बचत खात्यात जमा झालेल्या रकमेमुळे रोकडरहित (cashless) व्यवहार करणे सोईचे होते. अशा व्यवहारांमुळे स्वत:जवळ अधिक रक्कम ठेवावी लागत नाही व ती रक्कम हरवण्याची वा चोरीला जाण्याची भीती राहात नाही.

(2) आपण केलेली बचत रोख स्वरूपात असेल आणि तिची गुंतवणूक न करता ती तशीच ठेवली तर तिचे मूल्य काळाबरोबर कमी होते. म्हणजेच वस्तू विकत घेण्याची त्या रकमेची शक्ती म्हणजे पैशाची क्रयशक्ती (Purchasing power) कमी होते. (उदा. आज 10 रुपयांमध्ये 2 पेन्सिली मिळत असतील, तर काही वर्षांनंतर त्याच किमतीत एकच पेन्सिल मिळेल.) यासाठी बचतीची योग्य ठिकाणी गुंतवणूक करून त्यात वाढ होणे आवश्यक आहे.

(3) बचत केलेली रक्कम व्यवसाय वृद्धी, नवे उद्योग चालू करणे, अशा कामांसाठी वापरली गेली तर राष्ट्रीय उत्पादनात वाढ होते.

(4) एकूण मिळकतीपैकी बचतीचा काही भाग समाजकार्यासाठी खर्च केल्यास त्याचा दूरगामी फायदा सर्वांनाच होतो.

(5) आवश्यक तेवढा खर्च करून झाल्यावर चैनीच्या गोष्टींवरील खर्च कमी करून शिक्षण, वैद्यकीय उपचार, इत्यादींसाठी बचत करणे हिताचे असते.

चला, चर्चा करूया.

वरील चित्राचे निरीक्षण करा. बचतीचे व गुंतवणुकीचे काही मार्ग चित्रात दाखवले आहेत, त्यांवर चर्चा करा. यापेक्षा वेगळे आणखी कोणते मार्ग आहेत का याची माहिती मिळवा. ते चित्रातील रिकाम्या जागी लिहा.

जाणून घेऊया.

गुंतवणूक (Investments)

गुंतवणुकीचे अनेक प्रकार आहेत.गुंतवणूकदार बँक, पोस्ट अशा आर्थिक व्यवहार करणाऱ्या संस्थांमध्ये गुंतवणूक करणे पसंत करतात कारण तेथे पैशांची सुरक्षितता जास्त असते. शेअर्स, म्युच्युअल फंड इत्यादींमध्ये गुंतवणूक करण्यात थोडी जोखीम असते. कारण ज्या उद्योगात हे पैसे गुंतवले जातात त्या उद्योगास तोटा झाल्यास, गुंतवलेली रक्कम कमी होते. याउलट फायदा झाल्यास रक्कम सुरक्षित राहते आणि लाभांश मिळू शकतो.

गुंतवणूकदाराने गुंतवणूक करताना दोन मुख्य बाबी विचारात घेतल्या पाहिजेत. एक म्हणजे जोखीम व दुसरी म्हणजे लाभ. अधिक जोखीम पत्करून गुंतवणूकदार अधिक लाभ मिळवू शकतो, परंतु अधिक जोखीम असल्यामुळे तोटाही होऊ शकतो हे ध्यानात ठेवले पाहिजे.

उत्पन्न व गुंतवणुकीवर आधारित काही उदाहरणे खाली सोडवून दाखवली आहेत, ती अभ्यासा.

उदा (1) श्यामरावांचे 2015-16 चे सर्व प्रकारचे कर भरून झाल्यावर वार्षिक उत्पन्न 6,40,000 रुपये आहे. ते दर महिना विम्याचा 2,000 रुपयांचा हप्ता भरतात. वार्षिक उत्पन्नाचा 20% भाग ते भविष्य-निर्वाह निधीमध्ये गुंतवतात. आपत्कालीन खर्चासाठी महिना 500 रुपये बाजूला ठेवतात, तर वर्षामध्ये खर्चासाठी त्यांच्याकडे किती रुपये रक्कम उरते ?

उकल : (i) श्यामरावांचे वार्षिक उत्पन्न = 6,40,000 रुपये

(ii) विम्यासाठी नियोजन = $2000 \times 12 = 24,000$ रुपये

(iii) भविष्य निर्वाह निधीसाठी गुंतवलेली रक्कम = $6,40,000 \times \frac{20}{100} = 1,28,000$ रुपये

(iv) आपत्कालीन खर्चासाठी बाजूला काढलेली रक्कम = $500 \times 12 = 6000$ रुपये

$\therefore$ एकूण नियोजित रक्कम = $24,000 + 1,28,000 + 6,000 = 1,58,000$ रुपये

$\therefore$ वर्षभराच्या खर्चासाठी उरणारी रक्कम = $6,40,000 - 1,58,000 = 4,82,000$ रुपये

उदा (2) श्री शहा यांनी 3,20,000 रुपये बँकेत 10% चक्रवाढव्याजाने 2 वर्षांकरिता गुंतवले. त्याचप्रमाणे त्यांनी 2,40,000 रुपये करमुक्त म्युच्युअल फंडामध्ये गुंतवले. त्याचे बाजारभावाप्रमाणे 2 वर्षांनंतर त्यांना 3,05,000 रुपये मिळाले. तर त्यांची कोणती गुंतवणूक जास्त फायदेशीर ठरली ?

उकल : (i) चक्रवाढ व्याजाने गुंतवलेल्या रकमेवरील व्याज प्रथम काढू.

चक्रवाढ व्याज = रास - मुद्दल.

म्हणजेच $I = A - P$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - P$$

$$= P\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\right]$$

$$= 3,20,000\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 - 1\right]$$

$$= 3,20,000\left[(1.1)^2 - 1\right]$$
$$= 3,20,000\,[1.21 - 1]$$
$$= 3,20,000 \times 0.21$$
$= 67,200$ रुपये

शहा यांनी 3,20,000 रुपये बँकेत गुंतवल्यावर त्यांना 67,200 रुपये व्याज मिळाले.
मिळालेले व्याज गुंतवणुकीच्या शेकडा किती होते ते काढू.

व्याजाचे शतमान = $\frac{100 \times 67200}{3,20,000} = 21$ $\therefore$ बँकेतील गुंतवणुकीमुळे 21% फायदा झाला.

(ii) म्युच्युअल फंडामध्ये 2 वर्षांअखेरीस मिळालेली रक्कम = 3,05,000 रुपये

$\therefore$ म्युच्युअल फंडातील लाभांश = 3,05,000 − 2,40,000 = 65,000 रुपये

$\therefore$ लाभांशाचे शतमान = $\frac{65000 \times 100}{2,40,000} = 27.08$

म्युच्युअल फंडातील गुंतवणुकीमुळे त्यांना 27.08% फायदा झाला.
यावरून असे लक्षात येते की, श्री शहा यांची म्युच्युअल फंडातील गुंतवणूक जास्त फायदेशीर होती.

उदा (3) करीमभाई यांनी काचउद्योगात 4,00,000 रुपयांची गुंतवणूक केली. 2 वर्षांअखेरीस त्यांना त्या व्यवसायातून 5,20,000 रुपये मिळाले. गुंतवणुकीची रक्कम वगळता मिळालेला नफा त्यांनी 3 : 2 या प्रमाणात अनुक्रमे मुदत ठेव व शेअर्समध्ये गुंतवला तर त्यांनी प्रत्येक बाबीमध्ये किती रक्कम गुंतवली ?

उकल : करीमभाई यांना 2 वर्षांअखेर झालेला नफा = 5,20,000 − 4,00,000 = 1,20,000 रुपये

मुदत ठेवीमध्ये गुंतवलेली रक्कम = $\frac{3}{5} \times 1,20,000$
$= 3 \times 24,000$
$= 72,000$ रुपये

शेअर्समध्ये गुंतवलेली रक्कम = $\frac{2}{5} \times 1,20,000$
$= 2 \times 24,000$
$= 48,000$ रुपये

करीमभाई यांनी मुदत ठेव व शेअर्स या दोहोंमध्ये अनुक्रमे 72,000 व 48,000 रुपयांची गुंतवणूक केली.

उदा (4) श्री अनिल यांचे मासिक उत्पन्न व खर्च यांचे गुणोत्तर 5:4 आहे. श्री अमन यांचे तेच गुणोत्तर 3:2 आहे. तसेच अमन यांच्या मासिक उत्पन्नाच्या 4% उत्पन्न हे अनिल यांच्या मासिक उत्पन्नाच्या 7% एवढे आहे. अनिल यांचे मासिक उत्पन्न 9600 रुपये असल्यास

(i) श्री अमन यांचे मासिक उत्पन्न काढा. (ii) श्री अनिल व श्री अमन यांची बचत काढा.

उकल: आपणास माहीत आहे की, बचत = उत्पन्न − खर्च

अनिल यांचे उत्पन्न व खर्चाचे गुणोत्तर 5 : 4

अनिल यांचे उत्पन्न $5x$ मानू.

अनिल यांचा खर्च $4x$ मानू.

अमन यांचे उत्पन्न व खर्चाचे गुणोत्तर 3 : 2

अमन यांचे उत्पन्न $3y$ मानू.

अमन यांचा खर्च $2y$ मानू.

अनिल यांचे मासिक उत्पन्न 9600 रुपये म्हणजे $5x = 9600$ यावरून x काढू.

$$\therefore\ 5x = 9600$$
$$x = 1920$$

मासिक खर्च = $4x = 4 \times 1920 = 7680$ रुपये

अनिल यांचा मासिक खर्च 7680 रुपये $\therefore$ अनिल यांची बचत 1920 रुपये

अमन यांच्या उत्पन्नाचा 4% = अनिल यांच्या उत्पन्नाचा 7% हे दिले आहे.

$$\therefore\ \frac{4}{100} \times 3y = 9600 \times \frac{7}{100}$$
$$\therefore\ 12y = 9600 \times 7$$
$$\therefore\ y = \frac{9600 \times 7}{12} = 5600$$

अमन यांचे उत्पन्न = $3y = 3 \times 5600 = 16,800$ रुपये

अमन यांचा खर्च = $2y = 2 \times 5600 = 11,200$ रुपये

$\therefore$ अमन यांची बचत $16,800 - 11,200 = 5,600$ रुपये

श्री अमन यांचे मासिक उत्पन्न 16,800 रुपये श्री अमन यांची बचत 5,600 रुपये

श्री अनिल यांची मासिक बचत 1,920 रुपये

कृती I : अमिताने 35000 रुपयांपैकी काही रक्कम 4% व उरलेली रक्कम 5% व्याजाने एक वर्षासाठी गुंतवली. तिला एकूण व्याज 1530 रु. मिळाले, तर तिने वेगवेगळ्या व्याजाने गुंतवलेली रक्कम काढा. उत्तर शब्दांत लिहा.

4% दराने x रु. गुंतवले. 5% दराने y रु. गुंतवले.

$\square + \square = 35000$ ..... (I)

व्याज ↓

$\frac{4}{100}x + \frac{5}{100}y = 1530$ ..... (II)

$x = \square$ $y = \square$

उपक्रम : (1) पालकांच्या मदतीने तुमच्या घरातील आठवड्याचा जमाखर्च लिहून काढा. त्यासाठी खर्चाच्या प्रकाराचे स्तंभ तयार करा. अन्नधान्य, शिक्षण, वैद्यकीय खर्च, प्रवास, कपडे व किरकोळ खर्च अशा बाबींचा विचार करून सर्व खर्च लिहून काढा. जमेच्या बाजूला घरखर्चासाठी मिळालेली रक्कम, आधीची शिल्लक व काही नवी मिळकत झाल्यास ती नोंदवा.

(2) सुट्टीत संपूर्ण महिन्याचा जमाखर्च लिहा.

पृष्ठ 52 वरील गोविंदचा जमाखर्च अभ्यासा.

कृती II : कोरडवाहू जमीन असणाऱ्या शेतकऱ्याचे उत्पन्न वाढवण्यासाठी कोणकोणते उपाय करता येतील यावर वर्गात चर्चा करा. काही विद्यार्थ्यांनी खालीलप्रमाणे मते व्यक्त केली आहेत.

सोहेल : शेतकऱ्यांना फक्त शेतमाल विकला जातो तेव्हाच पैसे मिळतात, त्यातला फायदा वर्षभर पुरला पाहिजे म्हणून त्यांचे अर्थनियोजन जास्त महत्त्वाचे आहे.

प्रकाश : शेतमालाला रास्त भाव मिळाला तर उत्पन्न वाढेल.

नर्गिस : अर्थशास्त्राचा नियम आहे की एखाद्या वस्तूचा पुरवठा मागणीपेक्षा खूप जास्त झाला तर तिची किंमत कमी होते, मग तिची किंमत कमी झाली की फायदा कमी होणारच!

रीटा : जर शेतीचे उत्पन्न खूप झाले आणि भाव पडण्याची भीती असेल तर काही माल नीट साठवून ठेवावा, नंतर योग्य वेळी, बाजारात भाव वाढला की विकण्यास काढावा.

आझम : त्यासाठी चांगली गोदामे बांधायला हवीत.

रेश्मा : शेतकऱ्याला कमी व्याजाने सहज कर्ज मिळायला हवे.

वत्सला : दुध, कुक्कुटपालन यांसारखे शेतीपूरक व्यवसाय केले तर थोडे अधिक उत्पन्न मिळेल, शिवाय जनावरांच्या मलमूत्रापासून चांगले सेंद्रीय खत मिळेल.

कुणाल : शेतमालावर प्रक्रिया करणारे कारखाने काढले व सरबते, जॅम, लोणची, वाळवलेल्या भाज्या, फळाचा गर अशा वस्तू नीट पॅकिंग करून ठेवल्या तर वर्षभर विकता येतील.
निर्यातक्षम मालाचे अधिक उत्पन्न घ्यावे.

सरावसंच 6.1

1. अलकाला दरमहा पाठवलेल्या रकमेपैकी 90% रक्कम ती खर्च करते आणि महिना 120 रुपयांची बचत करते. तर तिला पाठवण्यात येणारी रक्कम काढा.
2. सुमितने 50,000 रुपये भांडवल घेऊन खाद्यपदार्थांचा व्यवसाय चालू केला. त्यामध्ये त्याला पहिल्या वर्षी 20% तोटा झाला. उरलेल्या भांडवलात दुसऱ्या वर्षी त्याने मिठाईचा व्यवसाय चालू केला, त्यात त्याला 5% नफा झाला. तर मूळ भांडवलावर त्याला शेकडा किती तोटा किंवा नफा झाला ?
3. निखिलने आपल्या मासिक उत्पन्नाचा 5% भाग मुलांच्या शिक्षणासाठी खर्च केला, 14% भाग शेअर्समध्ये गुंतवला, 3% भाग बँकेत ठेवला आणि 40% भाग दैनंदिन खर्चासाठी वापरला. गुंतवणूक व खर्च जाऊन त्याच्याकडे 19,000 रुपये उरले. तर त्याचे मासिक उत्पन्न काढा.
4. सय्यदभाई यांनी आपल्या उत्पन्नापैकी 40,000 रुपये 8% चक्रवाढ व्याजाने 2 वर्षांकरिता बँकेत गुंतवले. श्री फर्नांडीस यांनी 1,20,000 रुपये म्युच्युअल फंडामध्ये 2 वर्षांकरिता गुंतवले. 2 वर्षांनंतर श्री फर्नांडीस यांना 1,92,000 रुपये मिळाले. तर सय्यदभाई व श्री फर्नांडीस यांपैकी कोणाची गुंतवणूक जास्त फायदेशीर ठरली ?
5. समीराने आपल्या उत्पन्नाच्या 3% उत्पन्न समाजकार्यासाठी दिले व 90% उत्पन्न खर्च केले. तिच्याकडे 1750 रुपये शिल्लक राहिले. तर तिचे मासिक उत्पन्न काढा.

चला, चर्चा करूया.

कर म्हणजे काय? कोणकोणत्या प्रकारचे कर असतात? यांबद्दलची माहिती खालील वेबसाईटवर मिळवा.

ICT Tools or Links	www.incometaxindia.gov.in, www.mahavat.gov.in

जाणून घेऊया.

करआकारणी

राष्ट्राच्या उभारणीसाठी शासन विविध योजना आखत असते. या योजनांच्या कार्यवाहीसाठी शासनाला फार मोठ्या रकमेची गरज असते. अनेक प्रकारच्या करांची आकारणी करून ही रक्कम उभी केली जाते.

करांची उपयुक्तता (Utility of taxes)

- पायाभूत सुविधा पुरवणे.
- विविध कल्याणकारी योजनांची अंमलबजावणी करणे.
- वेगवेगळ्या क्षेत्रांमध्ये विकास कामे आणि संशोधन यांबाबत योजना राबवणे.
- कायदा आणि सुव्यवस्था राखणे.
- नैसर्गिक आपत्तीमुळे बाधित झालेल्या लोकांना मदत करणे.
- राष्ट्राचे आणि नागरिकांचे संरक्षण करणे, इत्यादी.

करांचे प्रकार (Types of taxes)

प्रत्यक्ष कर (Direct taxes)	अप्रत्यक्ष कर (Indirect taxes)
ज्या करांचा भार प्रत्यक्ष करदात्यावर पडतो, ते कर म्हणजे प्रत्यक्ष कर. उदा. आयकर, संपत्तीकर, व्यवसाय कर अबकारी कर, कस्टम ड्युटी, इत्यादी.	ज्या करांचा भार प्रत्यक्षपणे करदात्यावर पडत नाही, ते कर म्हणजे अप्रत्यक्ष कर. उदा. केंद्रीय विक्री कर, मूल्यवर्धित कर, सेवाकर, इत्यादी.

2017 साली ज्या प्रकारे कर आकारणी केली जात आहे त्यानुसार त्याचे प्रकार वर दाखवले आहेत.

उपक्रम : विविध प्रकारचे कर भरणाऱ्या नोकरदार किंवा व्यावसायिकांकडून वेगवेगळ्या करांविषयी माहिती मिळवा.

जाणून घेऊया.

आयकर (Income tax)

व्यक्तीचे, संस्थेचे किंवा इतर कायदेशीर उद्योगांचे भारतातील उत्पन्न, आयकर अधिनियमान्वये ठरलेल्या मर्यादेपेक्षा अधिक असेल तर त्यावर आयकर (प्राप्तीकर) आकारला जातो.

या प्रकरणात आपण प्रत्यक्ष करापैकी फक्त व्यक्तींना भराव्या लागणाऱ्या आयकराचा विचार करणार आहोत.

आयकराची आकारणी केंद्र सरकार करते. भारतामध्ये आयकर आकारणी दोन अधिनियमांद्वारे केली जाते.

(1) आयकर कायदा 1961 हा दि. 01.04.1962 पासून अस्तित्वात आला.

(2) प्रत्येक वर्षी संसदेत संमत केला जाणारा अर्थविषयक तरतुदी असणारा कायदा.

दरवर्षी साधारणपणे फेब्रुवारी महिन्यात अर्थमंत्री आगामी आर्थिक वर्षासाठी तरतुदी असणारे अर्थसंकल्प (Budget) सादर करतात. त्यात आयकराचे दर सुचवलेले असतात. संसदेने अर्थसंकल्प मंजूर केला की हे दर पुढील वर्षासाठी लागू होतात.

आयकराचे दर प्रत्येक वर्षीच्या अर्थसंकल्पात निश्चित केले जातात.

आयकराच्या संदर्भातील बाबी :

- **करदाता** (An assessee) : आयकर नियमावलीमध्ये समाविष्ट असलेल्या नियमांनुसार ज्या व्यक्तीने आयकर देणे अपेक्षित आहे त्या व्यक्तीला 'करदाता' म्हणतात.
- **वित्तीय वर्ष** (Financial year) : ज्या एक वर्षाच्या कालावधीत उत्पन्न मिळवले जाते त्या वर्षाला 'वित्तीय वर्ष' असे म्हणतात. आपल्या देशात सध्या 1 एप्रिल ते 31 मार्च हे वित्तीय वर्ष असते.
- **कर आकारणी वर्ष** (Assessment year) : वित्तीय वर्षाच्या लगतच्या पुढील वित्तीय वर्षास 'कर आकारणी वर्ष' असे म्हणतात. चालू वर्षात मागील वित्तीय वर्षासाठी कर आकारणी निश्चित केली जाते.

'वित्तीय वर्ष' व 'संबंधित कर आकारणी वर्ष' खाली नमूद केले आहे.

आर्थिक वर्ष (Financial Year)	संबंधित कर आकारणी वर्ष (Assessment Year)
2016-17 म्हणजे 01-04-2016 ते 31-03-17	2017-18
2017-18 म्हणजे 01-04-2017 ते 31-03-18	2018-19

- **कायम खाते क्रमांक** (PAN) : प्रत्येक व्यक्तीने अर्ज केल्यावर आयकर विभागाकडून एक विशिष्ट असा दहा अंकाक्षरात्मक क्रमांक दिला जातो. त्यास '**कायम खाते क्रमांक**' म्हणजे 'Permanent Account Number (PAN)' म्हणतात. अनेक महत्त्वाच्या कागदपत्रांत आणि आर्थिक व्यवहारांत हा क्रमांक नमूद करणे आवश्यक असते.

पॅनकार्डाचा उपयोग : आयकर विभागाकडे करभरणा करण्यासाठीचे चलन, करविवरणपत्र (रिटर्नचा फॉर्म) इतर पत्रव्यवहार यांवर पॅन क्रमांक लिहिणे बंधनकारक असते. तसेच मोठे आर्थिक व्यवहार करताना पॅन नोंदवावा लागतो. अनेक वेळा पॅनकार्डाचा उपयोग ओळखीचा पुरावा (Identity proof) म्हणूनही होतो.

जाणून घेऊया.

आयकर आकारणी

आयकराची आकारणी उत्पन्नावर होत असल्यामुळे उत्पन्नाचे विविध स्रोत जाणणे आवश्यक आहे.

उत्पन्नाचे मुख्यतः पाच स्रोत आहेत :

(1) पगाराद्‌वारे मिळणारे उत्पन्न.
(2) घर मिळकतीतून मिळणारे उत्पन्न.
(3) धंदा आणि व्यवसायातून मिळणारे उत्पन्न.
(4) भांडवली नफ्यातून (Capital gain) मिळणारे उत्पन्न.
(5) इतर स्रोतांतून मिळणारे उत्पन्न.

पगारदार व्यक्तीच्या आयकर गणनेसाठी महत्त्वाच्या बाबी :

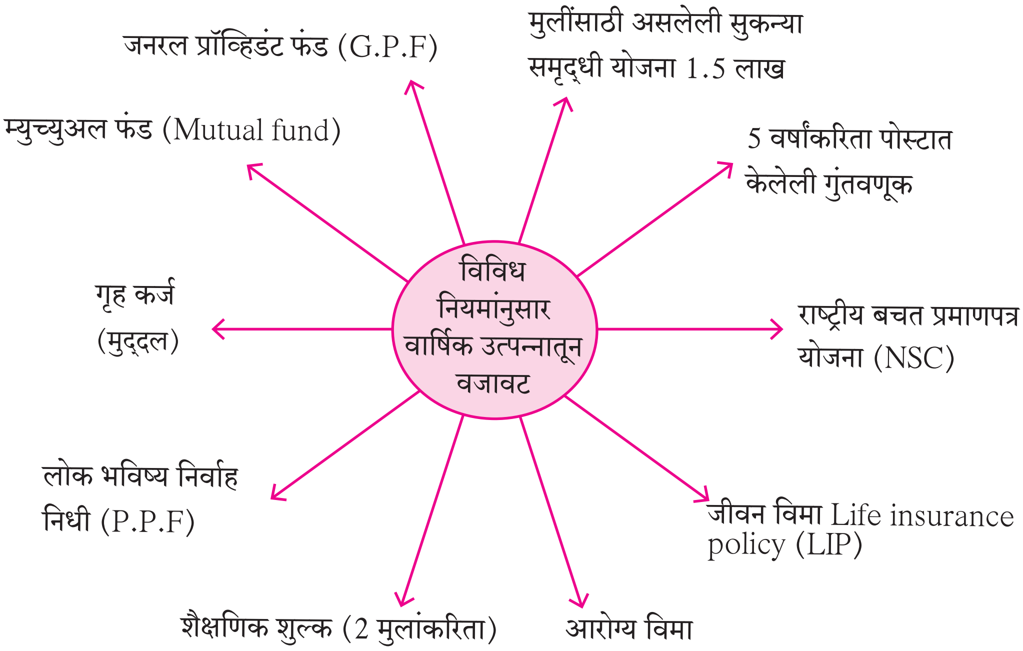
आयकराचे गणन करण्यासाठी एकूण वार्षिक उत्पन्न विचारात घेतले जाते. आयकर अधिनियमांच्या 80C, 80D, 80G इत्यादी कलमांना अनुसरून एकूण वार्षिक उत्पन्नातून काही वजावट मिळते. ही वजावट करून उरलेल्या उत्पन्नाला **करपात्र उत्पन्न** म्हणतात. आयकराची आकारणी या उत्पन्नावरच केली जाते.

कर आकारणीचे नियम काही वेळा बदलले जातात, म्हणून प्रत्यक्ष कर आकारणी करताना अद्ययावत नियम माहीत असणे आवश्यक असते.

करपात्र उत्पन्नापैकी ठरावीक मर्यादेपर्यंतच्या रकमेवर कर आकारला जात नाही. या रकमेस करपात्र उत्पन्नातील **मूळ सवलत रक्कम** असे म्हणतात.

- शेतकऱ्यांना शेतमालाच्या उत्पन्नावर आयकरातून सूट असते.
- आयकर कलम 80 G अन्वये पंतप्रधान मदतनिधी, मुख्यमंत्री मदतनिधी किंवा मान्यताप्राप्त संस्थांना देणग्या दिल्यास आयकरात 100% सूट मिळते.
- 80 D या कलमान्वये आरोग्यासाठीच्या विमा हप्त्यावर सूट दिली जाते.
- सामान्यत: एकूण गुंतवणुकींवर 80C या कलमान्वये विविध प्रकारच्या गुंतवणुकींपैकी जास्तीत जास्त 1,50,000 रुपयांपर्यंत वजावट मिळते.

2017-18 च्या अर्थसंकल्पानुसार ज्यांची वार्षिक उत्पन्नातून वजावट दाखवता येते अशा काही महत्त्वाच्या गुंतवणुकी खालील आकृतीत दाखवल्या आहेत :



करदात्याच्या वयानुसार आयकराचे दर प्रत्येक वर्षीच्या अर्थसंकल्पात ठरवले जातात.
उत्पन्नाच्या टप्प्याप्रमाणे आयकराचे दर दर्शवणाऱ्या नमुना सारण्या खाली दिल्या आहेत.

सारणी I

60 वर्षांपर्यंतच्या व्यक्ती			
करपात्र उत्पन्नाचे टप्पे (रुपयांत)	प्राप्तिकर (आयकर)	शिक्षण उपकर	माध्यमिक व उच्च शिक्षण उपकर
2,50,000 पर्यंत	करमुक्त	करमुक्त	करमुक्त
2,50,001 ते 5,00,000	5 टक्के (करपात्र उत्पन्न वजा अडीच लाख यावर)	आयकराच्या 2 टक्के	आयकराच्या 1 टक्का
5,00,001 ते 10,00,000	₹ 12,500 + 20 टक्के (करपात्र उत्पन्न वजा पाच लाख यावर)	आयकराच्या 2 टक्के	आयकराच्या 1 टक्का
10,00,000 पेक्षा अधिक	₹ 1,12,500 + 30 टक्के (करपात्र उत्पन्न वजा दहा लाख यावर)	आयकराच्या 2 टक्के	आयकराच्या 1 टक्का
(वार्षिक उत्पन्न 50 लाख रुपये ते एक कोटी रुपयांच्या दरम्यान असणाऱ्यांना आयकराच्या 10 टक्के सरचार्ज आणि वार्षिक उत्पन्न एक कोटी रुपयांहून अधिक असणाऱ्यांना आयकराच्या 15 टक्के सरचार्ज)			

कृती : वरील सारणी (I) चे निरीक्षण करा व खालील उदाहरणातील चौकटींत योग्य संख्या लिहा.

उदा. • मेहता यांचे वार्षिक उत्पन्न साडेचार लाख रुपये आहे. त्यांनी उत्पन्नातून वजावट मिळणारी कोणतीही बचत केलेली नाही, तर त्यांचे करपात्र उत्पन्न कोणत्या टप्प्यात बसेल? [ ]

• त्यांना किती रकमेवर किती टक्के दराने आयकर भरावा लागेल ? ₹ [ ] वर [ ] दराने

• उपकर किती रकमेवर आकारला जाईल? [ ]

सारणी II

ज्येष्ठ नागरिक (वय वर्षे साठ ते ऐंशी)			
करपात्र उत्पन्नाचे टप्पे (रुपयांत)	प्राप्तिकर (आयकर)	शिक्षण उपकर	माध्यमिक व उच्च शिक्षण उपकर
3,00,000 पर्यंत	करमुक्त	करमुक्त	करमुक्त
3,00,001 ते 5,00,000	5 टक्के (करपात्र उत्पन्न वजा तीन लाख यांवर)	आयकराच्या 2 टक्के	आयकराच्या 1 टक्का
5,00,001 ते 10,00,000	₹ 10,000 + 20 टक्के (करपात्र उत्पन्न वजा पाच लाख यांवर)	आयकराच्या 2 टक्के	आयकराच्या 1 टक्का
10,00,000 पेक्षा अधिक	₹ 1,10,000 + 30 टक्के (करपात्र उत्पन्न वजा दहा लाख यांवर)	आयकराच्या 2 टक्के	आयकराच्या 1 टक्का
(वार्षिक उत्पन्न 50 लाख रुपये ते एक कोटी रुपयांच्या दरम्यान असणाऱ्यांना आयकराच्या 10 टक्के सरचार्ज आणि वार्षिक उत्पन्न एक कोटी रुपयांहून अधिक असणाऱ्यांना आयकराच्या 15 टक्के सरचार्ज)			

कृती : सारणी II वरून खालील कृती पूर्ण करा.

उदा. श्री. पंडित यांचे वय 67 वर्षे आहे. गेल्या वर्षी त्यांचे वार्षिक उत्पन्न 13,25,000 रुपये होते. तर त्यांचे करपात्र उत्पन्न किती होते ? त्यांना किती आयकर भरावा लागेल ?

13,25,000 − 10,00,000 = 3,25,000

म्हणून त्यांना सारणीप्रमाणे 1,10,000 रुपये आयकर भरावा लागणार आहेच. शिवाय 3,25,000 रुपयांवर 30% म्हणजे $3,25,000 \times \frac{30}{100} = \square$ रु. आयकर भरावा लागेल.

म्हणजे आयकराची रक्कम $\square + \square = \square$

देय आयकराच्या 2% शिक्षण उपकर म्हणजे $\square \times \frac{2}{100} = \square$.

देय आयकराच्या 1% माध्यमिक व उच्च शिक्षण उपकर भरावा लागेल. म्हणजे $\square \times \frac{1}{100} = \square$

∴ एकूण आयकर = आयकर + शिक्षण उपकर + माध्यमिक व शिक्षण उपकर.

$= \square + \square + \square$

= ₹ 2,13,725

सारणी III

अति ज्येष्ठ नागरिक (वय वर्षे ऐंशीपेक्षा अधिक)			
उत्पन्नाचे टप्पे (रुपयांत)	प्राप्तिकर (आयकर)	शिक्षण उपकर	माध्यमिक व उच्च शिक्षण उपकर
5,00,000 पर्यंत	करमुक्त	करमुक्त	करमुक्त
5,00,001 ते 10,00,000	20 टक्के (करपात्र उत्पन्न वजा पाच लाख यावर)	आयकराच्या 2 टक्के	आयकराच्या 1 टक्का
10,00,000 पेक्षा अधिक	₹ 1,00,000 + 30 टक्के (करपात्र उत्पन्न वजा दहा लाख यावर)	आयकराच्या 2 टक्के	आयकराच्या 1 टक्का
(वार्षिक उत्पन्न 50 लाख रुपये ते एक कोटी रुपयांच्या दरम्यान असणाऱ्यांना आयकराच्या 10 टक्के सरचार्ज आणि वार्षिक उत्पन्न एक कोटी रूपयांहून अधिक असणाऱ्यांना आयकराच्या 15 टक्के सरचार्ज)			

उपक्रम : 80C, 80G, 80D या अधिनियमांची माहिती मिळवा.
पॅनकार्ड पाहा त्यावर कोणती माहिती असते त्याची नोंद करा.
रोकडरहित (Cashless) व्यवहारासाठी वापरल्या जाणाऱ्या मार्गांची माहिती मिळवा.

वरील सारण्या व व्यक्तींना मिळणाऱ्या विविध सवलतींचा उपयोग करून आयकराचे गणन कसे करतात ते आपण पुढील उदाहरणांवरून समजून घेऊ.

उदा (1) श्री म्हात्रे यांचे वय 50 वर्षे आहे. त्यांचे एकूण वार्षिक उत्पन्न 12,00,000 रुपये आहे. त्यांनी खालीलप्रमाणे गुंतवणूक केली.

(i) विमा हप्ता : ₹ 90,000 (ii) भविष्य निर्वाह निधी : ₹ 25,000

(iii) सार्वजनिक भविष्य निर्वाह निधी : ₹ 15,000 (iv) राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्र योजना : ₹ 20,000

यावरून आयकरासाठी मान्य असणारी कपात, करपात्र उत्पन्न व आयकर काढा.

उकल : (1) एकूण वार्षिक उत्पन्न = 12,00,000 रुपये आहे.

(2) 80C नुसार एकूण गुंतवणूक

गुंतवणूक	रक्कम (रुपये)
(i) विमा हप्ता	90,000
(ii) भविष्य निर्वाह निधी	25,000
(iii) सार्वजनिक भविष्य निर्वाह निधी	15,000
(iv) राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्र योजना	20,000
एकूण	1,50,000

नियम 80C नुसार आयकरासाठी जास्तीत जास्त 1,50,000 रुपयांची वजावट मान्य असते.

(3) ∴ करपात्र उत्पन्न = [1] मधील रक्कम – [2] मधील रक्कम

= 12,00,000 – 1,50,000 = 10,50,000

(4) श्री. म्हात्रे यांना भराव्या लागणाऱ्या आयकराचे गणन सारणी (I) च्या साहाय्याने करू.

श्री. म्हात्रे यांचे करपात्र उत्पन्न = ₹10,50,000 म्हणजे दहा लाखांपेक्षा अधिक आहे.

∴ सारणी (I) नुसार आयकर = ₹ 1,12,500 + 30% (एकूण उत्पन्न वजा दहा लाख यांवर 30%)

∴ 10,50,000 – 10,00,000 = 50,000

∴ आयकर $= 1,12,500 + 50,000 \times \frac{30}{100}$

$=1,12,500 + 15,000$

$= 1,27,500$

याशिवाय 2% शिक्षण उपकर आणि 1% माध्यमिक व उच्चशिक्षण उपकर यांचाही समावेश करावा लागेल.

शिक्षण उपकर $= 1,27,500 \times \frac{2}{100} = 2550$ रुपये

माध्यमिक व उच्चशिक्षण उपकर $= 1,27,500 \times \frac{1}{100} = 1275$ रुपये

∴ एकूण आयकर = 1,27,500 + 2550 + 1275 = 1,31,325 रुपये

श्री म्हात्रे यांना भरावा लागणारा एकूण आयकर = 1,31,325 रुपये

उदा (2) अहमदभाई हे 62 वर्षांचे ज्येष्ठ नागरिक एका कंपनीत नोकरी करतात. त्यांचे एकूण वार्षिक उत्पन्न 6,20,000 रुपये आहे. त्यांनी सार्वजनिक भविष्य निर्वाह निधीमध्ये 1,00,000 रुपये गुंतवले. तसेच विम्याचा वार्षिक हप्ता 80,000 रुपये भरला व मुख्यमंत्रीनिधीला 10,000 रुपये देणगी दिली, तर अहमदभाई यांनी किती आयकर भरावा लागेल?

उकल : (1) एकूण वार्षिक उत्पन्न = 6,20,000 रुपये

(2) एकूण कपात (नियम 80C प्रमाणे)

(i) सार्वजनिक भविष्य निर्वाह निधी = 1,00,000 रुपये

(ii) विमा = 80,000 रुपये

1,80,000 रुपये

(iii) 80C नुसार जास्तीत जास्त 1,50,000 रुपये कपात मान्य.

(3) मुख्यमंत्री निधीला दिलेली रक्कम (80 G प्रमाणे कपात) = 10000 रुपये.

(4) करपात्र उत्पन्न = (1) – [(2) + (3)]

= 6,20,000 – [1,50,000 + 10000]

= 4,60,000 रुपये

सारणी (II) प्रमाणे करपात्र उत्पन्न तीन लाख ते पाच लाख रुपये या मर्यादेत आहे.

$\therefore$ देय आयकर = (करपात्र उत्पन्न – 3,00,000)$\times \frac{5}{100}$

$= (4,60,000 - 3,00,000)\times \frac{5}{100}$

$= 1,60,000 \times \frac{5}{100}$

= 8000 रुपये

शिक्षण उपकर हा आयकरावर आकारला जातो, म्हणून,

शिक्षण उपकर : $8,000 \times \frac{2}{100} = 160$ माध्यमिक व उच्चशिक्षण उपकर : $8,000\times \frac{1}{100} = 80$

$\therefore$ एकूण आयकर = 8000 + 160 + 80 = ₹ 8,240

$\therefore$ अहमदभाई यांना एकूण 8240 रुपये इतका आयकर भरावा लागेल.

उदा (3) श्रीमती हिंदुजा यांचे वय 50 वर्षे आहे. त्यांचे करपात्र उत्पन्न 16,30,000 रुपये आहे. तर त्यांना एकूण किती आयकर भरावा लागेल ?

उकल : श्रीमती हिंदुजा यांचे करपात्र उत्पन्न दहा लाखांपेक्षा अधिक या गटात आहे.

आता आपण सारणी I वापरून त्यांच्या आयकराचे गणन करूया.

सारणी I प्रमाणे, दहालाखांपेक्षा अधिक उत्पन्नासाठी,

आयकर = रु. 1,12,500 + (करपात्र उत्पन्न वजा दहा लाख यावर 30%)

श्रीमती हिंदुजा यांचे उत्पन्न − दहा लाख $= 16,30,000 - 10,00,000$

$= 6,30,000$ रुपये

सारणी I वरून

देय आयकर $= 1,12,500 + 6,30,000 \times \frac{30}{100}$

$= 1,12,500 + 30 \times 6,300$

$= 1,12,500 + 1,89,000$

$= 3,01,500$ रुपये

यावर 1% माध्यमिक व उच्चशिक्षण कर $= \frac{1}{100} \times 3,01,500 =$ ₹ 3015

2% शिक्षण कर $= \frac{2}{100} \times 3,01,500 =$ ₹ 6030

$\therefore$ एकूण आयकर $= 3,01,500 + 3015 + 6030$

$= 3,10,545$

$\therefore$ एकूण भरावा लागणारा आयकर 3,10,545 रुपये

सरावसंच 6.2

(1) खालील सारणीचे निरीक्षण करा. सारणीमध्ये दिलेल्या व्यक्तींना दिलेल्या करपात्र उत्पन्नावर आयकर भरावा लागेल किंवा नाही ते लिहा.

अ.क्र.	व्यक्ती	वय	करपात्र उत्पन्न (₹)	आयकर भरावा लागेल किंवा नाही
(i)	कु. निकिता	27	₹ 2,34,000	
(ii)	श्री कुलकर्णी	36	₹ 3,27,000	
(iii)	श्रीमती मेहता	44	₹ 5,82,000	
(iv)	श्री बजाज	64	₹ 8,40,000	
(v)	श्री डीसिल्व्हा	81	₹ 4,50,000	

(2) श्री कर्तारसिंग (वय 48 वर्षे) खाजगी कंपनीत नोकरी करतात. योग्य भत्ते वगळून त्यांचा मासिक पगार 42,000 रुपये आहे. ते भविष्य निर्वाह निधी खात्यात दरमहा 3000 रुपये गुंतवतात. त्यांनी 15,000 रुपयांचे राष्ट्रीय बचत प्रमाणपत्र घेतले आहे व त्यांनी 12000 रुपयांची देणगी पंतप्रधान मदत निधीला दिली आहे, तर त्यांच्या आयकराचे गणन करा.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

(1) खालीलपैकी योग्य पर्याय निवडा.

(i) विविध प्रकारच्या गुंतवणुकींपैकी 80 C कलमांनुसार आयकर गणनेसाठी जास्तीत जास्त किती रुपये वजावट मिळते ?

(A) दीड लाख रुपये (B) अडीच लाख रुपये (C) एक लाख रुपये (D) दोन लाख रुपये

(ii) एका व्यक्तीने 2017-18 मध्ये मिळवलेल्या उत्पन्नाचे कर आकारणी वर्ष खालीलपैकी कोणते ?

(A) 2016-17 (B) 2018-19 (C) 2017-18 (D) 2015-16

(2) श्री शेखर उत्पन्नाच्या 60% खर्च करतात. त्यानंतर उरलेल्या उत्पन्नातून 300 रुपये अनाथाश्रमाला देणगी देतात तेव्हा त्यांच्याकडे 3,200 रुपये उरतात, तर त्यांचे उत्पन्न काढा.

(3) श्री हिरालाल यांनी 2,15,000 रुपये म्युच्युअल फंडामध्ये गुंतवले. त्याचे 2 वर्षांनी त्यांना 3,05,000 रुपये मिळाले. श्री रमणिकलाल यांनी 1,40,000 रुपये 8% दराने चक्रवाढ व्याजाने 2 वर्षांकरिता बँकेत गुंतवले. तर प्रत्येकाला झालेला शेकडा फायदा काढा. कोणाची गुंतवणूक अधिक फायदेशार झाली?

(4) एका बचत खात्यामध्ये वर्षाच्या सुरुवातीला 24,000 रुपये होते. त्यामध्ये 56,000 रुपयांची भर घातली व ती सर्व रक्कम 7.5% दराने चक्रवाढ व्याजाने बँकेत गुंतवली. तर 3 वर्षांनंतर एकूण किती रक्कम परत मिळेल?

(5) श्री मनोहर यांनी आपल्या उत्पन्नाचा 20% भाग आपल्या मोठ्या मुलाला आणि 30% भाग धाकट्या मुलास दिला. नंतर उरलेल्या रकमेच्या 10% रक्कम देणगी म्हणून शाळेला दिली. तेव्हा त्यांच्याकडे 1,80,000 रुपये उरले. तर श्री मनोहर यांचे उत्पन्न काढा.

(6*) कैलासचा उत्पन्नाच्या 85% इतका खर्च होत असे. त्याचे उत्पन्न 36% वाढले तेव्हा त्याचा खर्च पूर्वीच्या खर्चाच्या 40% वाढला. तर त्याची आता होणारी शेकडा बचत काढा.

(7*) रमेश, सुरेश आणि प्रीती या तिघांचेही एकूण वार्षिक उत्पन्न 8,07,000 रुपये आहे. ते तिघे आपल्या उत्पन्नाचा अनुक्रमे 75%, 80% आणि 90% भाग खर्च करतात. जर त्यांच्या बचतींचे गुणोत्तर 16 : 17 : 12 असेल तर प्रत्येकाची वार्षिक बचत काढा.

(8) खालील व्यक्तींचे देय आयकराचे गणन करा.

(i) श्री कदम यांचे वय 35 वर्षे असून त्यांचे करपात्र उत्पन्न 13,35,000 रुपये आहे.

(ii) श्री खान यांचे वय 65 वर्षे असून त्यांचे करपात्र उत्पन्न 4,50,000 रुपये आहे.

(iii) कु. वर्षा (वय 26 वर्षे) यांचे करपात्र उत्पन्न 2,30,000 रुपये आहे.

ICT Tools or Links

भारत सरकारच्या www.incometaxindia.gov.in या वेबसाइटला भेट द्या. त्या साइटवरील incometax calculator या मेन्यू वर क्लिक करा. येणाऱ्या फॉर्ममध्ये काल्पनिक उत्पन्न आणि वजावटीच्या काल्पनिक रकमा लिहून आयकराची रक्कम काढण्याचा प्रयत्न करा.

7 सांख्यिकी

चला, शिकूया.

- जोडस्तंभालेख
- विभाजित स्तंभालेख
- शतमान स्तंभालेख
- प्राथमिक व दुय्यम सामग्री
- अवर्गीकृत व वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी
- संचित वारंवारता सारणी
- मध्य, मध्यक आणि बहुलक (अवर्गीकृत सामग्रीसाठी)

जरा आठवूया.

मागील इयत्तांमध्ये आपण साधा स्तंभालेख व जोडस्तंभालेख कसे काढायचे हे पाहिले आहे. तसेच वर्तमानपत्रे, मासिके, दूरदर्शन इत्यादी माध्यमांतून विविध आलेख पाहून त्यांची माहिती मिळवली आहे.

माहितीच्या स्वरूपाप्रमाणे त्या माहितीचे योग्य सादरीकरण करणारा आलेख काढता येणे महत्त्वाचे असते.

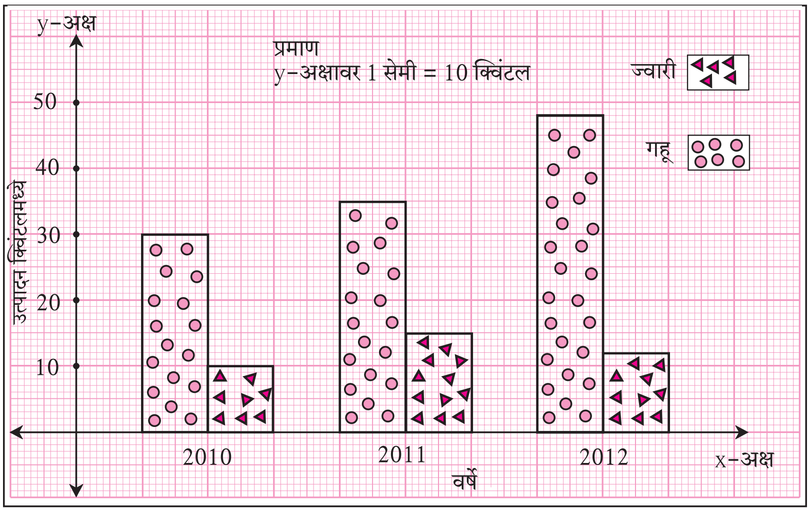
उदा. एका शेतकऱ्याला त्याच्या शेतातून गहू व ज्वारी या दोन पिकांचे तीन वर्षांत मिळालेले उत्पादन दर्शवणारा जोडस्तंभालेख काढून दाखवला आहे. त्यावरून पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) तीन वर्षांमध्ये कोणत्या धान्याचे उत्पादन सतत वाढले ?

(ii) 2012 मध्ये 2011 पेक्षा ज्वारीचे उत्पादन किती कमी झाले ?

(iii) 2010 मधील गव्हाचे उत्पादन व 2012 मधील गव्हाचे उत्पादन यांतील फरक किती ?

(iv) या आलेखातील माहितीवरून खालील सारणी पूर्ण करा.



उत्पादन (क्विंटल) / वर्ष	गहू	ज्वारी	एकूण उत्पादन
2011			
2012	48	12	60

जाणून घेऊया.

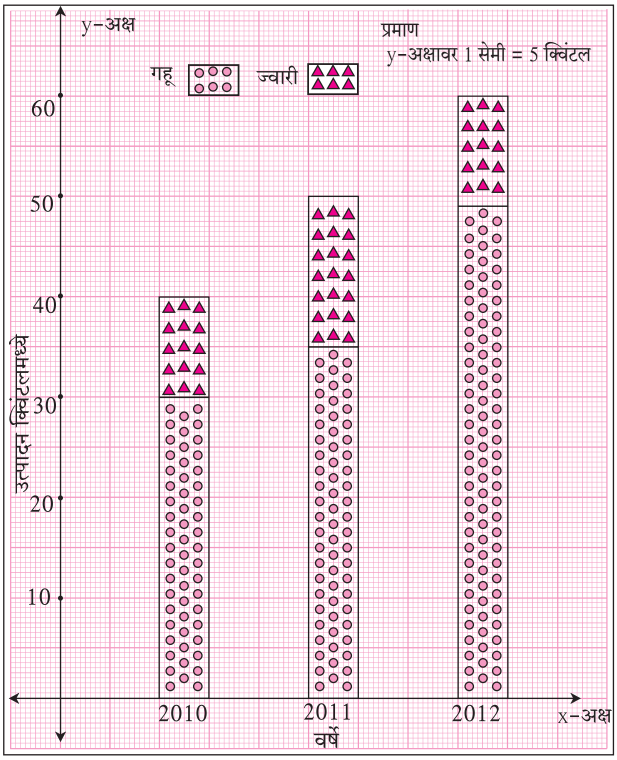
विभाजित स्तंभालेख (Sub-divided bar diagram)

सामग्रीतील माहितीची तुलना दर्शवणारा स्तंभालेख वेगळ्या पद्धतीनेही काढता येतो. त्याला विभाजित स्तंभालेख म्हणतात. त्यासाठी सामग्रीतील एकाच प्रकारच्या दोन बाबींच्या बेरजा करतात, आलेल्या बेरजा योग्य प्रमाण घेऊन स्तंभांनी दर्शवतात, स्तंभांचे प्रत्येक बाब दर्शवणारे प्रमाणबद्ध भाग करतात. मागील उदाहरणातील माहिती दर्शवणारा विभाजित स्तंभालेख कसा काढायचा हे पाहू.

(i) एकूण उत्पादनाएवढी प्रत्येक स्तंभाची उंची योग्य प्रमाणाने दाखवावी.

(ii) त्यामध्ये गव्हाचे उत्पादन हा एकूण उत्पादनाच्या स्तंभाचा एक भाग असेल. तो काही खुणेने दर्शवावा.

(iii) स्तंभाचा राहिलेला भाग हा साहजिकच ज्वारीचे उत्पादन दाखवेल. तो वेगळ्या खुणेने दर्शवावा.



या रीतीने शेजारी काढलेला विभाजित स्तंभालेख पाहा.

दोन बाबींची शतमानाने केलेली तुलना कधी कधी जास्त उपयोगी असते, हे आपण अभ्यासले आहे. उदाहरणार्थ, 2000 रुपयांवर 600 रुपये नफा आणि 1500 रुपयांवर 510 रुपये नफा, यांत 600 रुपये नफा हा जास्त दिसतो. पण दोन्ही नफ्यांची अनुक्रमे 30% आणि 34% ही शतमाने लक्षात घेतली, तर 1500 रुपयांवर 510 रुपये नफा हा व्यवहार अधिक फायदेशीर आहे, हे लक्षात येते.

शतमान स्तंभालेख (Percentage bar diagram)

दिलेल्या माहितींची तुलना वेगळ्या प्रकारे समजण्यासाठी दिलेली माहिती शतमानांत रूपांतरित करून जो विभाजित स्तंभालेख काढतात, त्याला शतमान स्तंभालेख म्हणतात. मागील उदाहरणांतील माहितीची शतमाने शेजारील सारणीत काढून दाखवली आहेत.

वर्ष	गव्हाचे उत्पादन (क्विं.)	ज्वारीचे उत्पादन (क्विं.)	एकूण उत्पादनाच्या प्रमाणात गव्हाच्या उत्पादनाचे शतमान
2010	30	10	$\frac{30}{40} \times 100 = 75\%$
2011	35	15	$\frac{35}{50} \times 100 = 70\%$
2012	48	12	$\frac{48}{60} \times 100 = 80\%$

ही माहिती दर्शवणारा स्तंभालेख खालील पायऱ्यांनी काढला आहे.

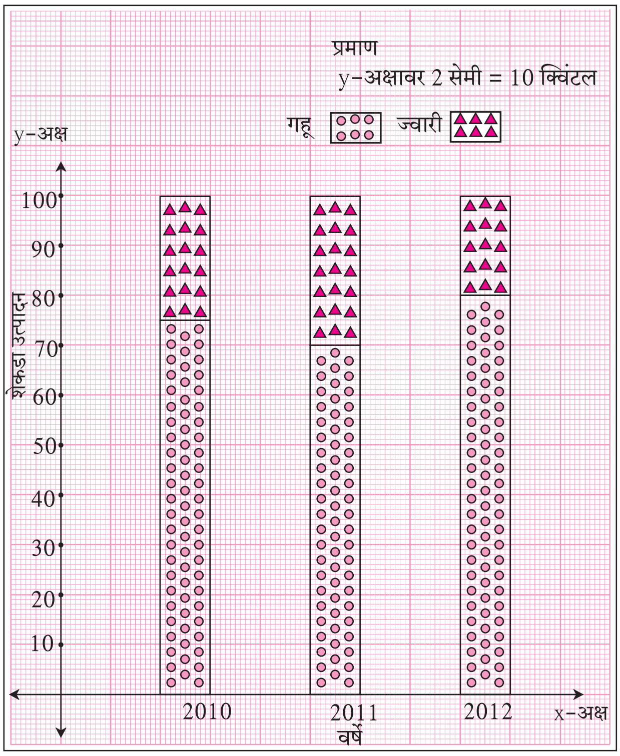
(i) प्रत्येक वर्षातील गहू व ज्वारीच्या एकूण उत्पादनात असलेले गव्हाच्या उत्पादनाचे व ज्वारीच्या उत्पादनाचे शतमान काढले.

(ii) प्रत्येक स्तंभाची Y-अक्षावरील उंची प्रमाणाने 100 घेतली.

(iii) गव्हाच्या उत्पादनाचे एकूण उत्पादनाशी असलेले शतमान, घेतलेल्या प्रमाणाने स्तंभाचा भाग खुणा करून दर्शवले.

(iv) स्तंभाचा उरलेला भाग हा एकूण उत्पादनातील ज्वारीचे शतमान दर्शवतो.

दोनपेक्षा अधिक बाबींची माहिती ही विभाजित किंवा शतमान स्तंभालेखाने दर्शवता येते.



सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) शेजारी शतमान स्तंभालेख दिला आहे. त्यामध्ये दोन कुटुंबांची विविध बाबींवरील खर्चांची माहिती दिली आहे. त्यावरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

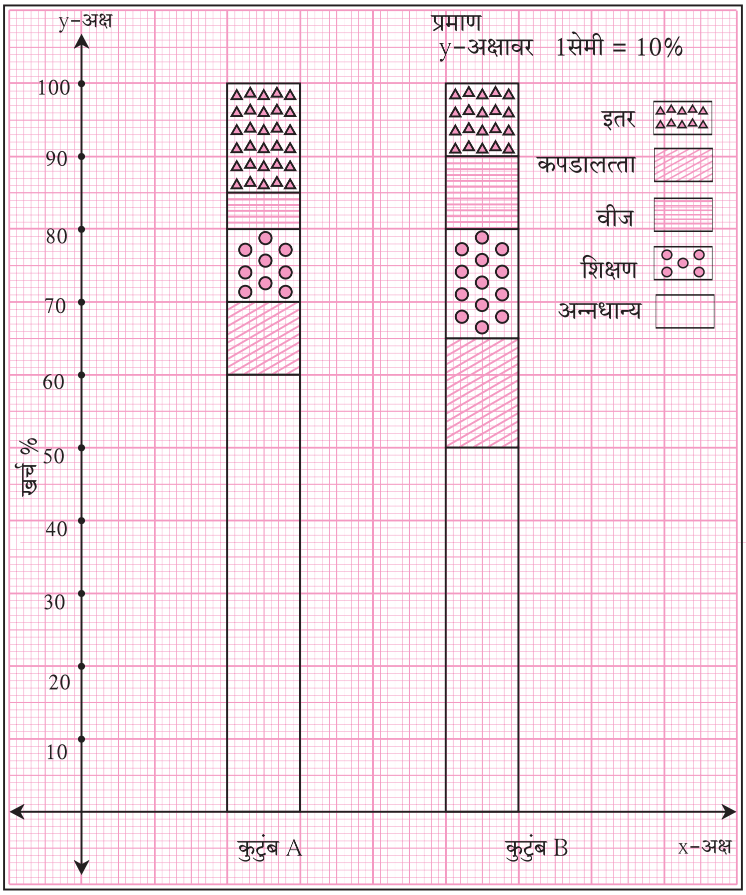
(i) प्रत्येक कुटुंबाच्या विविध बाबींवरील खर्चांची शतमाने लिहा.

(ii) कोणत्या कुटुंबाचा अन्नधान्याचा खर्च त्याच्या एकूण खर्चाच्या प्रमाणात जास्त आहे? किती टक्क्यांनी जास्त आहे?

(iii) दोन्ही कुटुंबांच्या इतर खर्चांची टक्केवारी किती किती आहे?

(iv) कोणत्या कुटुंबाच्या वीजखर्चाची टक्केवारी जास्त आहे ?

(v) कोणत्या कुटुंबाच्या शिक्षणखर्चाची टक्केवारी जास्त आहे?



उकल : (i)

कुटुंब \ खर्च	अन्नधान्य	कपडालत्ता	शिक्षण	वीज	इतर
A	60%	10%	10%	5%	15%
B	50%	15%	15%	10%	10%

(ii) कुटुंब A चा अन्नधान्याचा खर्च एकूण खर्चाच्या प्रमाणात कुटुंब B च्या खर्चापेक्षा 10% जास्त आहे.

(iii) कुटुंब A चा इतर खर्च 15% आणि कुटुंब B चा इतर खर्च 10% आहे.

(iv) कुटुंब B च्या वीजखर्चाचे शतमान जास्त आहे. (v) कुटुंब B च्या शिक्षणखर्चाचे शतमान जास्त आहे.

सरावसंच 7.1

(1) खालील सारणीमध्ये भारतातील ट्रक व बस यांची जवळच्या पूर्ण लाखांतील संख्या खाली दिली आहे. त्यावरून शतमान स्तंभालेख काढा. (शतमाने जवळच्या पूर्णांकापर्यंत घ्या.)

वर्ष	ट्रकची संख्या	बसची संख्या
2005-2006	47	9
2007-2008	56	13
2008-2009	60	16
2009-2010	63	18

(2) खालील सारणीमध्ये भारतातील पक्क्या रस्त्यांची व कच्च्या रस्त्यांची माहिती दिली आहे. त्यावरून विभाजित व शतमान स्तंभालेख काढा. (शतमाने जवळच्या पूर्णांकापर्यंत घ्या.)

वर्षे	पक्के रस्ते (लक्ष किमी)	कच्चे रस्ते (लक्ष किमी)
2000-2001	14	10
2001-2002	15	11
2003-2004	17	13
2007-2008	20	19

कृती : खालील सारणीमध्ये विविध राज्यांतील प्रत्येक 1000 मुलग्यांमागे असणारी मुलींची संख्या दिली आहे. त्यावरून दिलेल्या सारणीमधील रिकाम्या चौकटी भरा.

राज्ये	मुलग्यांची संख्या	मुलींची संख्या	एकूण	मुलग्यांचे शतमान (जवळच्या पूर्णांकापर्यंत)	मुलींचे शतमान (जवळच्या पूर्णांकापर्यंत)
आसाम	1000	960	1960	$\frac{1000}{1960}\times\frac{100}{1}=$ = 51%	100 - 51 = 49%
बिहार	1000	840	1840		
पंजाब	1000	900			
केरळ	1000	1080			
महाराष्ट्र	1000	900			

सारणीवरून मिळालेल्या माहितीचा शतमान स्तंभालेख काढा. त्यावरून निष्कर्ष काढून चर्चा करा.

विचार करूया. पृष्ठ क्रमांक 111 वरील कृतीसाठी दिलेल्या सारणीत पाच राज्यातील दर हजार मुलग्यांमागे असलेली मुलींची संख्या दिली आहे.

त्याच राज्यांतील साक्षरतेचे प्रमाण खाली दिले आहे.

आसाम (73%), बिहार (64%), पंजाब (77%), केरळ (94%) व महाराष्ट्र (83%)

सारणीतील मुलींची संख्या आणि त्या त्या राज्यातील साक्षरतेचे प्रमाण यांचा विचार करा. त्यावरून काही निष्कर्ष मिळतो का?

चला, चर्चा करूया.

पुढील माहिती दर्शवण्यासाठी कोणत्या प्रकारचा स्तंभालेख काढणे योग्य ठरेल ?

(1) चार गावांमधील साक्षरांचे शेकडा प्रमाण.

(2) एका कुटुंबाचा विविध घटकांवर होणारा खर्च.

(3) पाच तुकड्यांपैकी प्रत्येक तुकडीतील मुलगे व मुली यांच्या संख्या.

(4) तीन दिवस चाललेल्या विज्ञान प्रदर्शनाला रोज भेट देणाऱ्या व्यक्तींची संख्या.

(5) जानेवारी ते जून या प्रत्येक महिन्यातील तुमच्या गावाचे कमाल व किमान तापमान.

(6) दुचाकी चालवताना हेल्मेट वापरणाऱ्या आणि न वापरणाऱ्या 100 कुटुंबांतील व्यक्तींची संख्या

जाणून घेऊया.

सांख्यिकी (Statistics)

एखाद्या मोठ्या समूहाचा अभ्यास करण्यासाठी त्यातील काही घटकांचा पुरेसा लहान गट यादृच्छिक पद्धतीने निवडतात. हा मोठ्या गटाचा प्रातिनिधिक गट असतो. या प्रातिनिधिक गटाची अभ्यासासंबंधित माहिती जमा करतात. ही माहिती बहुतांश वेळा सांख्यिक स्वरूपात असते. तिचे विश्लेषण करून काही निष्कर्ष काढतात. या प्रकारच्या अभ्यासाला सांख्यिकी (statistics) असे नाव आहे.

Statistics हा शब्द status या लॅटिन शब्दापासून तयार झाला आहे. याचा अर्थ राज्यातील स्थिती असा होतो. यावरून पूर्वी सांख्यिकी हे शास्त्र राज्याच्या प्रशासकीय व्यवहाराशी संबंधित होते असे दिसते. परंतु सध्या या शास्त्राचा उपयोग सर्वच क्षेत्रांत केला जातो. **सर रोनाल्ड ऐल्मर फिशर (Sir Ronald Aylmer Fisher)** (17 फेब्रुवारी 1890 - 29 जुलै 1962) ह्यांना संख्याशास्त्राचे जनक मानतात.

माहितीचे संकलन (Data collection)

शिक्षिका : एका गावातील प्रत्येक कुटुंबाकडे किती शेती आहे ही माहिती संकलित करायची आहे, काय कराल?

रॉबर्ट : गावातील प्रत्येक घरी जाऊन प्रत्येकाकडे किती शेती आहे याची नोंद करू.

शिक्षिका : अगदी बरोबर, विद्यार्थी मित्रांनो एखाद्या विशिष्ट समूहाविषयी आपण जी माहिती एकत्र करतो ती प्रामुख्याने संख्यांच्या स्वरूपात असते. तिला सामग्री म्हणतात. सामग्री संकलित करण्यापूर्वी ती आपण कशासाठी वापरणार आहोत हे माहीत असायला हवे. जर एखाद्या व्यक्तीने माहिती घेण्याच्या ठिकाणी जाऊन प्रश्न विचारणे, मोजदाद करणे इत्यादी प्रकारे सामग्रीचे संकलन केले तर त्या सामग्रीला प्राथमिक सामग्री म्हणतात.

आफरीन : म्हणजेच रॉबर्टने सांगितल्याप्रमाणे प्रत्येक घरी जाऊन शेतीची संकलित केलेली माहिती ही प्राथमिक सामग्री राहील.

शिक्षिका : शाब्बास आफरीन !

रमेश : परंतु वरील माहिती अगदी कमी वेळात संकलित करायची असेल तर ?

शिक्षिका : रमेशचे म्हणणे बरोबर आहे. तर अशा वेळी माहिती संकलनाचा दुसरा उपाय काय असेल यावर विचार करा.

केतकी : आपण तलाठी कार्यालयात जाऊन त्यांच्याकडील उपलब्ध नोंदींवरून शेतीची माहिती संकलित करू शकतो.

शिक्षिका : बरोबर, काही परिस्थितीत वेळेची उपलब्धता, साधनांचा अभाव अशा कारणांमुळे सामग्रीचे संकलन व्यक्तिश: करणे शक्य होत नाही. अशा वेळी इतरांनी संकलित केलेली सामग्री, कार्यालयीन दस्तऐवजांत प्रसिद्ध झालेली सामग्री, सरकारी विभागांतील उपलब्ध माहिती, शोध निबंध, या स्वरूपांत असलेली सामग्री वापरतात. अशा सामग्रीला दुय्यम सामग्री असे म्हणतात. म्हणजेच केतकीने सुचवल्यानुसार तलाठी कार्यालयात जाऊन शेतीची संकलित केलेली माहिती ही दुय्यम सामग्री होय.

खालील उदाहरणे पाहा.

(i) वर्तमानपत्रातील माहिती वापरून केलेला तक्ता ही दुय्यम सामग्री होईल.

(ii) उपाहारगृहात पदार्थांचा दर्जा समजण्यासाठी ग्राहकांना त्यांचे अभिप्राय विचारून मिळवलेली माहिती, ही प्राथमिक सामग्री होईल.

(iii) वर्गातील विद्यार्थ्यांच्या उंचींची प्रत्यक्ष मोजून केलेली नोंद, ही प्राथमिक सामग्री होईल.

प्राथमिक सामग्री	दुय्यम सामग्री
1. संकलन करण्यास जास्त वेळ लागतो. 2. अद्ययावत व तपशीलवार असते. 3. अचूक आणि विश्वसनीय असते.	1. त्वरित उपलब्ध होऊ शकते. 2. ह्यामध्ये पूर्वी संकलित केलेली माहिती घेतल्यामुळे ती अद्ययावत असतेच असे नाही. माहितीचा तपशील क्वचित कमी पडतो. 3. ही कमी विश्वसनीय असू शकते.

कृती : तुम्ही अनेक वेळा वेगवेगळ्या कारणांसाठी माहिती गोळा करता; अशी 3 ते 4 उदाहरणे घेऊन गोळा केलेली सामग्री प्राथमिक आहे की दुय्यम आहे यांवर चर्चा करा.

सरावसंच 7.2

(1) खालीलप्रमाणे गोळा केलेल्या सामग्रीचे प्राथमिक सामग्री किंवा दुय्यम सामग्री यामध्ये वर्गीकरण करा.

(i) प्रत्यक्ष वर्गात जाऊन शाळेतील प्रत्येक वर्गातील विद्यार्थ्यांची हजेरीची माहिती गोळा केली.

(ii) प्रत्येक विद्यार्थ्याच्या उंचीची माहिती वरिष्ठ कार्यालयास तातडीने पाठवायची असल्याने शाळेतील शारीरिक शिक्षण विभागातील नोंदींवरून माहिती गोळा केली.

(iii) नांदपूर येथील प्रत्येक कुटुंबातील शालाबाह्य विद्यार्थ्यांची माहिती प्रत्यक्ष घरी जाऊन गोळा केली.

(iv) विज्ञान प्रकल्पासाठी प्रत्यक्ष जंगलात जाऊन झाडांची पाहणी करून माहिती गोळा केली.

जरा आठवूया.

सामग्रीचे वर्गीकरण (Classification of data)

उदा (1) एका शाळेतील इयत्ता 9 वीच्या 50 विद्यार्थ्यांनी प्रथम घटक चाचणीत गणितात 20 पैकी मिळवलेले गुण खालीलप्रमाणे आहेत.

20, 6, 14, 10, 13, 15, 12, 14, 17, 17, 18, 11, 19, 9, 16, 18, 14, 7, 17, 20,
8, 15, 16, 10, 15, 12, 18, 17, 12, 11, 11, 10, 16, 14, 16, 18, 10, 7, 17, 14,
20, 17, 13, 15, 18, 20, 12, 12, 15, 10

येथे संकलित केलेल्या संख्यात्मक माहितीस काय म्हणतात ?...... कच्ची सामग्री.

यातील प्रत्येक संख्येला काय म्हणतात ?....... प्राप्तांक.

वरील माहितीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे मिळवा.

(i) 15 गुण मिळवणारे एकूण विद्यार्थी किती ?

(ii) 15 गुणांपेक्षा जास्त गुण मिळवणारे एकूण विद्यार्थी किती ?

(iii) 16 गुणापेक्षा कमी गुण मिळवणारे एकूण विद्यार्थी किती ?

(iv) सर्वांत कमी गुण किती आहेत ?

(v) सर्वांत जास्त गुण किती आहेत ?

चला, चर्चा करूया.

(1) तुम्हांला वरील प्रश्नांची उत्तरे अगदी सहजपणे मिळाली की प्रत्येक वेळी गुणांचे निरीक्षण करावे लागले ?

(2) वरील कामात सुलभता येण्यासाठी काय करता येईल ?

शमीम : वरील उत्तरे प्रत्येक वेळी निरीक्षणातून मिळत असल्यामुळे हे काम किचकट व कंटाळवाणे झाले आहे, परंतु दिलेली कच्ची सामग्री चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने लिहिल्यास या कामात सुलभता येऊ शकेल.

शमीमच्या म्हणण्यानुसार सामग्रीतील गुण चढत्या क्रमाने लिहू.

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13,
14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17,
18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

माहिती चढत्या क्रमाने लिहिल्यावर उदा 1 मधील पाचही प्रश्नांची उत्तरे सुलभतेने मिळतात काय? याचा पडताळा घ्या.

पडताळ्यावरून हे स्पष्ट होईल की सामग्री चढत्या क्रमाने मांडल्यामुळे पाचही प्रश्नांची उत्तरे अगदी सहज मिळतात.

जरा आठवूया.

मार्टीन : सामग्री सारणी स्वरूपात मांडूनसुद्धा वरील कामात अधिक सुलभता आणता येते, हे आम्ही मागील इयत्तेत अभ्यासले आहे. या सारणीला वारंवारता वितरण सारणी म्हणतात.

शिक्षिका : मार्टीन, अगदी बरोबर ! आता ही सारणी आधीचेच उदा. 1 च्या आधारे तयार करा.

उदाहरण (1) मध्ये सर्वांत कमी गुण 6 आहेत आणि सर्वांत जास्त गुण 20 आहेत. म्हणून सारणीमध्ये प्राप्तांकांच्या स्तंभात 6 ते 20 प्राप्तांक लिहा. दुसऱ्या स्तंभात ताळ्याच्या खुणा करून शेवटच्या स्तंभात खुणा मोजून वारंवारता लिहा.

वारंवारता वितरण सारणी

प्राप्तांक (गुण)	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (f)(विद्यार्थी संख्या)
6	|	1
7	||	2
8		
9		
10	卌	5
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17	卌 |	6
18		
19		
20	||||	4
		एकूण N = 50

N ही सर्व वारंवारतांची बेरीज आहे.

चला, चर्चा करूया.

वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी (Grouped frequency distribution table)

वरील वारंवारता वितरण सारणीमध्ये,

(1) ही सारणी खूप मोठी झाली असे वाटते काय?

(2) जेव्हा सामग्रीतील प्राप्तांकांची संख्या जास्त असेल तेव्हा ही सारणी तयार करणे कठीण होईल काय?

शिक्षिका : वरील चर्चेवरून लक्षात आले की, जेव्हा सामग्रीतील प्राप्तांकाची संख्या जास्त असते तेव्हा वारंवारता वितरण सारणीचा विस्तार मोठा होतो. ती तयार करण्यास खूप वेळ लागतो. सारणीचा विस्तार आणि वेळ कमी करण्यासाठी काही उपाय सुचवता येतील काय?

रोहित : अशा वेळी सामग्रीचे गट पाडावेत.

शिक्षिका : शाब्बास रोहित, सामग्रीचे गट पाडले म्हणजेच वर्ग तयार केले तर ती सामग्री आटोपशीर होऊन वेळही कमी लागेल.अशा सारणीलाच वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी म्हणतात.

ही सारणी दोन पद्धतींनी मांडता येते. (1) समावेशक पद्धती व (2) असमावेशक पद्धती

(1) समावेशक पद्धती (खंडित वर्ग) (Inclusive method)

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

वरील सामग्रीमध्ये सर्वात लहान प्राप्तांक ☐ व सर्वांत मोठा प्राप्तांक ☐ आहे. सर्वांत मोठ्या आणि सर्वांत लहान प्राप्तांकांतील फरक 20 − 6 = 14 आहे. या फरकालाच **सामग्रीचा विस्तार** असे म्हणतात. हा विस्तार लक्षात घेऊन सामग्रीचे सोईस्कर असे कोणते वर्ग तयार करता येतील ?

(i) 6 ते 8, 9 ते 11, 12 ते 14, 15 ते 17, 18 ते 20 किंवा

(ii) 6 ते 10, 11 ते15, 16 ते 20 असे वर्ग करता येतील.

ही सारणी तयार करताना 6, 10 आणि त्यांमधील सर्व प्राप्तांकांचा 6 ते 10 या वर्गात समावेश झाला म्हणून सारणी तयार करण्याच्या या पद्धतीला समावेशक पद्धती म्हणतात. 6 ते 10, 11 ते15, 16 ते 20 या वर्गांना खंडित वर्ग म्हणतात.

6 ते 10, 11 ते15 आणि 16 ते 20 हे वर्ग घेऊन वरील सामग्रीची वारंवारता वितरण सारणी तयार करू.

वर्गीकृत वारंवारता सारणी (समावेशक पद्धती)

वर्ग	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (f) (विद्यार्थी संख्या)
6 ते 10	卌 卌	**10**
11 ते 15	.....	.....
16 ते 20	.....	20
		N = 50

जाणून घेऊया.

सांख्यिकीमधील काही संज्ञा (Basic terms in statistics)

(1) **वर्ग (Class) :** प्राप्तांकाच्या सोईस्कर आकाराच्या गटांना वर्ग असे म्हणतात.

6 ते 10, 11 ते15 हे वर्ग 6−10, 11−15 असेही लिहितात.

(2) **वर्गमर्यादा (Class limits) :** वर्ग दर्शवणाऱ्या संख्यांना वर्गमर्यादा म्हणतात.

6 ते 10 या वर्गाची 6 ही खालची वर्गमर्यादा व 10 ही वरची वर्गमर्यादा आहे.

(3) **वारंवारता (Frequency) :** प्रत्येक वर्गात जेवढे प्राप्तांक येतात, त्या प्राप्तांकाच्या एकूण संख्येस त्या वर्गाची वारंवारता म्हणतात.

वरील सारणीत 11 ते 15 या वर्गात 20 प्राप्तांक येतात. 11 ते 15 या वर्गाची वारंवारता 20 आहे असे म्हणतात.

4. **वर्गांतर किंवा वर्गअवकाश (Class width) :** अखंडित वर्ग दिले असताना लगत येणाऱ्या दोन वर्गांच्या खालच्या (किंवा वरच्या) मर्यादांतील फरकाला वर्गांतर असे म्हणतात.

उदा. 5 – 10, 10 – 15, 15 – 20, ... असे वर्ग असल्यास, 5–10 चे वर्गांतर = 10 – 5 = 5 आहे.

5. **वर्गमध्य (Class mark) :** वर्गाच्या खालच्या व वरच्या वर्गमर्यादेच्या सरासरीस वर्गमध्य म्हणतात.

$$\text{वर्गमध्य} = \frac{\text{खालची वर्गमर्यादा} + \text{वरची वर्गमर्यादा}}{2}$$

उदा. 11 ते 15 या वर्गाचा वर्गमध्य $= \dfrac{\square + \square}{2} = \dfrac{26}{2} = 13$

(2) असमावेशक पद्धती (अखंडित वर्ग) (Exclusive method)

उदा. 6, 10, 10.3, 11, 15.7, 19, 20, 12, 13 हे प्राप्तांक दिले आहेत.
6–10, 11–15, 16–20 असे वर्ग घेऊन याची वर्गीकृत वारंवारता सारणी तयार करा.

उकल :

वर्ग (प्राप्तांक)	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (*f*)
6–10	||	**2**
11–15	|||	**3**
16–20	||	**2**

वरील सारणीत दिलेल्या प्राप्तांकांपैकी 10.3 व 15.7 हे दोन प्राप्तांक समाविष्ट करता आले नाहीत.

कारण 10.3, 15.7 ह्या संख्या 6–10, 11–15, 16–20 ह्यापैकी कोणत्याही वर्गात समाविष्ट होत नाहीत. याकरिता वर्गरचना बदलावी लागेल. म्हणून हे वर्ग 5–10, 10–15, 15–20, ... याप्रमाणे सलग लिहिल्यास वरील प्रश्न निर्माण होणार नाही. परंतु 10 या प्राप्तांकांची नोंद 5–10, 10–15 यांपैकी कोणत्या वर्गात करायची हा प्रश्न निर्माण होतो. ही अडचण दूर करण्यासाठी 10 हा प्राप्तांक 5–10 या वर्गात न घेता 10–15 या वर्गात समाविष्ट करावा असा संकेत मानतात. म्हणून 10 ची नोंद 10–15 या वर्गात होईल. या पद्धतीला असमावेशक पद्धती म्हणतात. अशा प्रकारे वर्ग घेतल्यामुळे 10.3 व 15.7 या संख्यांचा सारणीमध्ये समावेश करता आला.

आता याप्रमाणे वर्ग घेऊन आणि संकेत पाळून तयार केलेली सारणी पाहा.

वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी **(असमावेशक पद्धती)**

वर्ग (अखंडित) गुण	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (*f*) (विद्यार्थी संख्या)
5–10	|	1
10–15	|||||	5
15–20	||	2
20–25	|	1

हे लक्षात ठेवूया.

वारंवारता वितरण सारणी

अवर्गीकृत

इयत्ता नववीतील विद्यार्थ्यांची वये	विद्यार्थ्यांची संख्या
14	12
15	23
16	10

वर्गीकृत

समावेशक पद्धती (खंडित वर्ग)

बुटाचा क्रमांक	विद्यार्थी संख्या
2-4	12
5-7	29
8-10	7

असमावेशक पद्धती (अखंडित वर्ग)

उंची (सेमी)	विद्यार्थी संख्या
145-150	18
150-155	27
155-160	3

सरावसंच 7.3

(1) 20 ते 25 या वर्गाची खालची व वरची मर्यादा लिहा.

(2) 35 ते 40 या वर्गाचा वर्गमध्य काढा.

(3*) एका वर्गाचा मध्य 10 असून वर्गअवकाश 6 आहे, तर तो वर्ग कोणता ?

(4) खालील सारणी पूर्ण करा.

वर्ग (वय वर्षे)	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (f) (विद्यार्थी संख्या)
12-13	~~IIII~~	☐
13-14	~~IIII~~ ~~IIII~~ IIII	☐
14-15		☐
15-16	IIII	☐
		$N=\sum f = 35$

(5) एका शाळेच्या हरितसेनेतील 45 विद्यार्थ्यांपैकी प्रत्येकाने केलेल्या वृक्षारोपणाची संख्या खाली दिली आहे.
3, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 3, 5, 4, 7, 5 , 3, 6, 6, 5, 3, 4, 5, 7, 3, 5, 6, 4, 4, 3, 5, 6, 6, 4, 3, 5, 7, 3, 4, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 4, 7.
यावरून अवर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

(6) π ची 50 दशांश स्थळांपर्यंत किंमत खाली दिलेली आहे.
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510
यावरून दशांश चिन्हानंतरच्या अंकांची अवर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

(7*) खालील सारणीतील माहितीवरून वर्गांतर काढा व अखंडित वर्ग व खंडित वर्ग असणारी वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

(i)

वर्गमध्य	वारंवारता
5	3
15	9
25	15
35	13

(ii)

वर्गमध्य	वारंवारता
22	6
24	7
26	13
28	4

(8) एका शाळेतील इयत्ता 9 वीच्या 46 विद्यार्थ्यांना त्यांच्या कंपासमधील पेन्सिलींची लांबी मोजावयास सांगितली. ती सेंटिमीटरमध्ये खालीलप्रमाणे आहे.

16, 15, 7, 4.5, 8.5, 5.5, 5, 6.5, 6, 10, 12,
13, 4.5, 4.9, 16, 11, 9.2, 7.3, 11.4, 12.7, 13.9, 16,
5.5, 9.9, 8.4, 11.4, 13.1, 15, 4.8, 10, 7.5, 8.5, 6.5,
7.2, 4.5, 5.7, 16, 5.7, 6.9, 8.9, 9.2, 10.2, 12.3, 13.7,
14.5, 10

0–5, 5–10, 10–15, ... याप्रमाणे वर्ग घेऊन असमावेशक पद्धतीने वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

(9) एका गावातील सहकारी दूध संकलन केंद्रावर 50 व्यक्तींनी प्रत्येकी किती लीटर दूध जमा केले आहे त्याची माहिती खाली दिली आहे.

27, 75, 5, 99, 70, 12, 15, 20, 30, 35, 45, 80,
77, 90, 92, 72, 4, 33, 22, 15, 20, 28, 29, 14,
16, 20, 72, 81, 85, 10, 16, 9, 25, 23, 26, 46,
55, 56, 66, 67, 51, 57, 44, 43, 6, 65, 42, 36,
7, 35

योग्य वर्ग घेऊन वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

(10) एका संस्थेला 'दिव्यांग विकास निधी' साठी गावातील 38 लोकांनी प्रत्येकी काही रुपये दिले, ही माहिती खाली दिली आहे.

101, 500, 401, 201, 301, 160, 210, 125, 175, 190, 450, 151,
101, 351, 251, 451, 151, 260, 360, 410, 150, 125, 161, 195,
351, 170, 225, 260, 290, 310, 360, 425, 420, 100, 105, 170,
250, 100

(i) 100–149, 150–199, 200–249, ... असे वर्ग घेऊन वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी तयार करा.

(ii) सारणीवरून 350 रुपये व त्यापेक्षा अधिक निधी देणाऱ्यांची संख्या किती आहे हे लिहा.

जाणून घेऊया.

वरच्या वर्गमर्यादेपेक्षा कमी संचित वारंवारता सारणी (Less than cumulative frequency)

उदा. इयत्ता 9 वीच्या एका शाळेतील 50 विद्यार्थ्यांनी प्रथम घटक चाचणीत गणितात 40 पैकी मिळवलेल्या गुणांची वारंवारता वितरण सारणी पुढे दिली आहे.

वर्ग	वारंवारता(विद्यार्थी संख्या) (f)
0-10	02
10-20	12
20-30	20
30-40	16
	एकूण N = 50

(1) सारणीवरून खालील विधानातील रिकाम्या जागा भरा.

(i) 10 ते 20 या वर्गाची खालची वर्गमर्यादा □ व वरची वर्गमर्यादा □ आहे.

(ii) 10 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ? [2]

(iii) 20 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ? 2 + □ = 14

(iv) 30 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ? □ + □ = 34

(v) 40 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ? □ + □ = 50

हे लक्षात ठेवूया.

एखाद्या विशिष्ट वर्गाची वारंवारता आणि त्या वर्गाच्या आधीच्या सर्व वर्गांच्या वारंवारता यांच्या बेरजेला त्या वर्गाची वरच्या मर्यादेपेक्षा कमी प्रकारची (Less than cumulative frequency) संचित वारंवारता म्हणतात. थोडक्यात हिला 'पेक्षा कमी संचित वारंवारता' सुद्धा म्हणतात.

वरच्या वर्गमर्यादेपेक्षा कमी संचित वारंवारता सारणीचा अर्थ

वर्ग (गुण)	वारंवारता	पेक्षा कमी संचित वारंवारता
0-10	2	2
10-20	12	2 + 12 = □
20-30	20	□+20=34
30-40	16	34 + □ =50
एकूण 50		

वर्ग	संचित वारंवारता	वरच्या वर्गमर्यादेपेक्षा कमीचा अर्थ
0-10	2	2 विद्यार्थ्यांना 10 पेक्षा कमी गुण
10-20	14	14 विद्यार्थ्यांना 20 पेक्षा कमी गुण
20-30	34	34 विद्यार्थ्यांना 30 पेक्षा कमी गुण
30-40	50	50 विद्यार्थ्यांना 40 पेक्षा कमी गुण
एकूण 50		

(2) खालच्या वर्गमर्यादेएवढी किंवा त्यापेक्षा जास्त संचित वारंवारता सारणी

वर्ग	वारंवारता	संचित वारंवारता
0-10	2	50
10-20	12	50 - 2 = 48
20-30	20	48 - 12 = 36
30-40	16	36 - 20 = 16
एकूण 50		

वर्ग	संचित वारंवारता	खालची वर्गमर्यादा किंवा खालच्या वर्गमर्यादेपेक्षा जास्तचा अर्थ
0-10	50	50 विद्यार्थ्यांना 0 किंवा 0 पेक्षा जास्त गुण मिळाले
10-20	48	48 विद्यार्थ्यांना 10 किंवा10 पेक्षा जास्त गुण मिळाले
20-30	36	36 विद्यार्थ्यांना 20 किंवा 20 पेक्षा जास्त गुण मिळाले
30-40	16	16 विद्यार्थ्यांना 30 किंवा 30 पेक्षा जास्त गुण मिळाले.

उदा. एका स्पोर्ट्स क्लबच्या टेबलटेनिसच्या सामन्यांसाठी आलेल्या खेळाडूंच्या वयांचे वर्गीकरण खालील सारणीत दिले आहे. त्यावरून खालची वर्गमर्यादा किंवा तिच्याहून जास्त वारंवारता सारणी पूर्ण करा.

उकल : खालच्या वर्गमर्यादेपेक्षा जास्त संचित वारंवारता सारणी

वय (वर्ष)	ताळ्याच्या खुणा	वारंवारता (विद्यार्थी संख्या)	खालची वर्गमर्यादा किंवा तिच्याहून जास्त संचित वारंवारता
10-12	卌 ||||	09	50
12 – 14	卌 卌 卌 卌 |||	□	□ - 9 = 41
14-16	卌 卌 |||	□	41 - 23 = □
15 – 16	卌	05	□ - 13 = □
		एकूण N = 50	

सरावसंच 7.4

(1) खालील संचित वारंवारता सारणी पूर्ण करा

वर्ग (उंची –सेमी मध्ये)	वारंवारता (विद्यार्थी संख्या)	पेक्षा कमी संचित वारंवारता
150-153	05	05
153-156	07	05+ □ = □
156-159	15	□ + 15 = □
159-162	10	□ + □ = 37
162-165	05	37+5=42
165-168	03	□ + □ = 45
	एकूण N = 45	

(2) खालील संचित वारंवारता सारणी पूर्ण करा.

वर्ग (मासिक उत्पन्न रुपये)	वारंवारता (व्यक्तींची संख्या)	पेक्षा जास्त किंवा तेवढीच संचित वारंवारता
1000-5000	45	....
5000-10000	19	....
10000-15000	16	....
15000-20000	02	....
20000-25000	05	....
	एकूण N = 87	

(3) एका वर्गातील 62 विद्यार्थ्यांना गणित विषयात 100 पैकी मिळालेले गुण खाली दिले आहेत.
0-10, 10-20 ..... हे वर्ग घेऊन वारंवारता सारणी आणि संचित वारंवारता सारणी (पेक्षा जास्त) तयार करा.

55, 60, 81, 90, 45, 65, 45, 52, 30, 85, 20, 10,
75, 95, 09, 20, 25, 39, 45, 50, 78, 70, 46, 64,
42, 58, 31, 82, 27, 11, 78, 97, 07, 22, 27, 36,
35, 40, 75, 80, 47, 69, 48, 59, 32, 83, 23, 17,
77, 45, 05, 23, 37, 38, 35, 25, 46, 57, 68, 45,
47, 49

तयार केलेल्या सारणीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) 40 किंवा 40 पेक्षा अधिक गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?
(ii) 90 किंवा 90 पेक्षा अधिक गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?
(iii) 60 किंवा 60 पेक्षा अधिक गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती
(iv) 0-10 या वर्गाची पेक्षा जास्त किंवा तेवढीच संचित वारंवारता किती ?

(4) वरील उदाहरण (3) साठी पेक्षा कमी संचित वारंवारता सारणी तयार करा यावरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) 40 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?
(ii) 10 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?
(iii) 60 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?
(iv) 50-60 या वर्गाची पेक्षा कमी संचित वारंवारता किती ?

जाणून घेऊया.

केंद्रीय प्रवृत्तीची परिमाणे : (Measures of central tendancy)

केंद्रीय प्रवृत्ती : सर्वेक्षणाने मिळवलेल्या सांख्यिक सामग्रीमध्ये सामान्यपणे एक गुणधर्म आढळतो. सामग्रीतील एखाद्या संख्येच्या आसपास इतर संख्यांची गर्दी अधिक झालेली दिसते. समूहाच्या या गुणधर्माला समूहाची केंद्रीय प्रवृत्ती म्हणतात.

समूहातील ज्या संख्येच्या आसपास इतर संख्यांची अधिक गर्दी असते, ती संख्या त्या समूहाचे प्रतिनिधित्व करते असे मानतात. अशा संख्येला केंद्रीय प्रवृत्तीचे परिमाण म्हणतात.

सांख्यिकीमध्ये केंद्रिय प्रवृत्तीची पुढील परिमाणे प्रामुख्याने वापरली जातात.

(1) **मध्य (Mean) :** सामग्रीतील सर्व संख्यांच्या अंकगणितीय सरासरीला त्या सामग्रीचा मध्य असे म्हणतात.

$$\text{सामग्रीचा 'मध्य'} = \frac{\text{सामग्रीतील सर्व प्राप्तांकांची बेरीज}}{\text{सामग्रीतील प्राप्तांकांची एकूण संख्या}}$$

उदा (1) 25, 30, 27, 23 आणि 25 या प्राप्तांकांचा मध्य काढा.

उकल : $\frac{25+30+27+23+25}{5} = \frac{130}{5} = 26$

उदा (2) इयत्ता नववीच्या 35 विद्यार्थ्यांना प्रथम सत्र परीक्षेत बीजगणितात 40 पैकी मिळालेले गुण खालीलप्रमाणे आहेत. त्यावरून गुणांचा मध्य काढा.

40, 35, 30, 25, 23, 20, 14, 15, 16, 20, 17, 37,
37, 20, 36, 16, 30, 25, 25, 36, 37, 39, 39, 40,
15, 16, 17, 30, 16, 39, 40, 35, 37, 23, 16.

उकल : येथे प्राप्तांकाची संख्या जास्त असल्यामुळे बेरीज तर करता येईल, परंतु आकडेमोड क्लिष्ट होईल. येथे 3 विद्यार्थ्यांना प्रत्येकी 30 गुण आहेत. त्यांच्या गुणांची बेरीज 30 **+** 30 **+** 30 = 90 अशी करण्याऐवजी 30 × 3 = 90 अशी करणे सोईचे आहे. त्यासाठी वारंवारता सारणी उपयोगी पडते.

संख्याशास्त्रात $\sum_{i=1}^{n}$ हे चिन्ह वापरणे खूप सोईचे असते. $\sum_{i=1}^{n} f_i x_i$ याचा अर्थ समजून घेऊ.

i हा धन पूर्णांक आहे.

f_i विद्यार्थ्यांना प्रत्येकी x_i गुण मिळाले असे समजू. Σ (सिग्मा) हे चिन्ह बेरजेसाठी वापरले जाते. $\sum_{i=1}^{n}$ हे चिन्ह i च्या 1 ते n या किमतींसाठी n पदांची बेरीज ठरवते.

गुण	विद्यार्थी संख्या	$f_i \times x_i$
14	1	14 × 1 = 14
15	2	15 × 2 = ...
16	5	16 × .... = ...
17	2	17 × 2 = 34
20	3	.... × 3 = ...
23	2	23 × 2 = ...
25	3	25 × 3 = ...
30	3	.... × .... = ...
35	2	35 × 2 = 70
36	2	.... × .... = ...
37	4	..... × .... = ...
39	3	39 × 3 = 117
40	3	.... × .... = 120
	N= ☐	$\sum f_i x_i = 956$

$$\text{मध्य } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{956}{35}$$

$$= 27.31 \text{ (अंदाजे)}$$

∴ दिलेल्या सामग्रीचा मध्य 27.31 आहे.

(2) **मध्यक (Median) :** सामग्रीतील संख्या चढत्या (किंवा उतरत्या) क्रमाने मांडतात. या मांडणीतील मध्यभागी येणाऱ्या संख्येला त्या सामग्रीचा मध्यक म्हणतात.

सामग्रीतील प्राप्तांकांची संख्या सम असेल तर मध्यावर येणाऱ्या दोन संख्यांची सरासरी हा मध्यक मानतात.

उदा. (1) 72, 66, 87, 92, 63, 78, 54 या सामग्रीचा मध्यक काढा.

उकल : दिलेले प्राप्तांक चढत्या क्रमाने मांडू.

54, 63, 66, **72**, 78, 87, 92

या मांडणीत चौथी संख्या मध्यावर येते, ती 72 आहे.

$\therefore$ दिलेल्या सामग्रीचा मध्यक = 72

उदा. (2) 30, 25, 32, 23, 42, 36, 40, 33, 21, 43 या सामग्रीचा मध्यक काढा.

उकल : दिलेले प्राप्तांक चढत्या क्रमाने लिहू.

21, 23, 25, 30, **32**, **33**, 36, 40, 42, 43

येथे प्राप्तांकांची संख्या 10, म्हणजे सम आहे.

$\therefore$ पाचवी व सहावी अशा दोन संख्या मध्यावर येतील. त्या अनुक्रमे 32 व 33 आहेत.

$\therefore$ सामग्रीचा मध्यक $= \frac{32+33}{2} = \frac{65}{2} = 32.5$

विचार करूया.

सामग्रीतील प्राप्तांकांची संख्या n असताना,

(i) n विषम असेल तर कितवा प्राप्तांक त्या सामग्रीचा मध्यक असेल ?

(ii) n सम असताना कितव्या दोन प्राप्तांकांची सरासरी त्या सामग्रीचा मध्यक असेल ?

(3) **बहुलक (Mode) :** सामग्रीमध्ये सर्वाधिक वेळा येणारा प्राप्तांक म्हणजे त्या सामग्रीचा बहुलक होय.

उदा. (1) 90, 55, 67, 55, 75, 75, 40, 35, 55, 95 या सामग्रीचा बहुलक काढा.

उकल : सामग्रीतील प्राप्तांक चढत्या क्रमाने मांडले तर कोणता प्राप्तांक सर्वाधिक वेळा आला आहे, हे ओळखणे सोपे जाईल.

दिलेल्या सामग्रीचा चढता क्रम : 35, 40, 55, 55, 55, 67, 75, 75 90, 95

यावरून सर्वाधिक वेळा आलेला प्राप्तांक = 55

$\therefore$ दिलेल्या सामग्रीचा बहुलक 55.

उदा (2) एका कारखान्यातील कामगारांची वये खालील सारणीत दिली आहेत.

वय (वर्षे)	19	21	25	27	30
कामगार	5	15	13	15	7

यावरून त्यांच्या वयाचा बहुलक काढा.

उकल : येथे सर्वाधिक वारंवारता 15 आहे. परंतु ही वारंवारता दोन प्राप्तांकांची आहे.

$\therefore$ बहुलक = 21 व 27 $\therefore$ वयाचा बहुलक 21 वर्षे व 27 वर्षे

सरावसंच 7.5

(1) मुकुंदचे 7 वर्षांचे सोयाबीनचे एकरी उत्पन्न क्विंटलमध्ये 10,7,5,3,9,6,9 असे आहे. यावरून एकरी उत्पन्नाचा मध्य काढा.

(2) दिलेल्या सामग्रीचा मध्यक काढा. 59,75,68,70,74,75,80

(3) गणिताच्या गृहपाठांत 7 विद्यार्थ्यांना मिळालेले 100 पैकी गुण खालीलप्रमाणे आहेत.
99, 100, 95, 100, 100, 80, 90 यावरून मिळालेल्या गुणांचे बहुलक काढा.

(4) एका कारखान्यातील 30 कामगारांना मिळत असलेला मासिक पगार रुपयांमध्ये खालीलप्रमाणे आहे.
5000, 7000, 3000, 4000, 4000, 3000, 3000, 3000, 8000, 4000,
4000, 9000, 3000, 5000, 5000, 4000, 4000, 3000, 5000, 5000,
6000, 8000, 3000, 3000, 6000, 7000, 7000, 6000, 6000, 4000
यावरून कामगारांचा मासिक पगाराचा मध्य काढा.

(5) एका टोपलीतील 10 टोमॅटोंचे वजन ग्रॅममध्ये प्रत्येकी 60, 70, 90, 95, 50, 65,70, 80, 85, 95 अशी आहेत. यावरून टोमॅटोंच्या वजनांचा मध्यक काढा.

(6) एका हॉकी खेळाडूने 9 सामन्यांत केलेले गोल खालीलप्रमाणे आहेत.
5, 4, 0, 2, 2, 4, 4, 3, 3 यावरून मध्य, मध्यक व बहुलक काढा.

(7) 50 प्राप्तांकांचा मध्य 80 आला. परंतु यांतील 19 हा प्राप्तांक चुकून 91 घेण्यात आला असे नंतर लक्षात आले, तर दुरुस्तीनंतरचा मध्य किती?

(8) येथे 10 प्राप्तांक चढत्या क्रमाने मांडलेले आहेत, 2, 3, 5, 9, $x + 1$, $x + 3$, 14, 16, 19, 20 जर त्यांचा मध्यक 11 आहे तर x ची किंमत काढा.

(9*) 35 प्राप्तांकांचा मध्य 20 आहे. यांपैकी पहिल्या 18 प्राप्तांकांचा मध्य 15 व शेवटच्या 18 प्राप्तांकांचा मध्य 25 असेल तर 18 वा प्राप्तांक काढा.

(10) पाच प्राप्तांकांचा मध्य 50 आहे. यांपैकी एक प्राप्तांक कमी झाल्यास मध्य 45 होतो, तर तो प्राप्तांक कोणता?

(11*) एका वर्गात 40 विद्यार्थी असून त्यांपैकी 15 मुलगे आहेत. एका परीक्षेत मुलग्यांना मिळालेल्या गुणांचा मध्य 33 व मुलींच्या गुणांचा मध्य 35 आहे यावरून वर्गातील एकूण विद्यार्थ्यांना मिळालेल्या गुणांचा मध्य काढा.

(12) 10 विदयार्थ्यांची किलोग्रॅममधील वजने खालीलप्रमाणे आहेत.
40, 35, 42, 43, 37, 35, 37, 37, 42, 37 यावरून बहुलक काढा..

(13) खालील सारणीत काही कुटुंबांतील 14 वर्षांखालील अपत्यांची संख्या दर्शवली आहे. यावरून 14 वर्षाखालील अपत्यांच्या संख्यांचा बहुलक काढा.

अपत्यांची संख्या	1	2	3	4
कुटुंबे (वारंवारता)	15	25	5	5

(14) खालील सामग्रीचा बहुलक काढा.

प्राप्तांक (गुण)	35	36	37	38	39	40
विद्यार्थी संख्या	09	07	09	04	04	02

'केंद्रीय प्रवृत्तीचे कोणते परिमाण घेणे योग्य असते ?' या प्रश्नाचे उत्तर, ते कोणत्या हेतूने निवडायचे याच्याशी संबंधित असते.

समजा, एखाद्या क्रिकेटच्या खेळाडूने सलग अकरा सामन्यांमध्ये अनुक्रमे 41, 58, 35, 80, 23, 12, 63, 48, 107, 9 आणि 73 धावा काढल्या. त्याचे एकूण कर्तृत्व ठरवताना त्याने प्रत्येक सामन्यात काढलेल्या धावा विचारात घेणे आवश्यक आहे. म्हणून त्याच्या धावांची केंद्रीय प्रवृत्ती 'मध्य' या परिमाणाने ठरवणे योग्य होईल.

तसेच कपडे तयार करणाऱ्या एखाद्या कंपनीला कोणत्या मापाचे शर्ट जास्त संख्येने शिवावे ते ठरवायचे आहे. त्यासाठी (34, 36, 38, 40, 42, 44 यांपैकी) कोणत्या मापाचे शर्ट अधिकाधिक लोक वापरतात हे सर्वेक्षणाने शोधावे लागेल. म्हणजे केंद्रीय प्रवृत्तीचे 'बहुलक' हे परिमाण निवडणे योग्य होईल.

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

(1) योग्य पर्याय निवडा.

(i) खालीलपैकी कोणती सामग्री प्राथमिक सामग्री नाही ?

(A) वर्गाला भेट देऊन विद्यार्थ्यांच्या हजेरीची माहिती गोळा केली.

(B) प्रत्यक्ष भेट देऊन घरातील व्यक्तींच्या संख्येची माहिती गोळा केली.

(C) तलाठ्याकडे जाऊन गावातील प्रत्येक शेतकऱ्याचे सोयाबीनच्या लागवडीखालील क्षेत्र नोंदवले.

(D) प्रत्यक्ष पाहणी करून नाल्यांच्या स्वच्छतेची माहिती घेतली.

(ii) 25-35 ह्या वर्गाची वरची वर्गमर्यादा कोणती ?

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iii) 25-35 ह्या वर्गाचा वर्गमध्य कोणता?

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iv) 0-10, 10-20, 20-30 .... असे वर्ग असणाऱ्या वारंवारता सारणीत 10 हा प्रप्तांक कोणत्या वर्गात समाविष्ट करावा ?

(A) 0-10 (B) 10-20 (C) 0-10 व 10-20 ह्या दोन्ही वर्गांत (D) 20-30

(v*) जर $\bar{x}$ हा $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ आणि $\bar{y}$ हा $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ चा मध्य असेल आणि $\bar{z}$ हा $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ यांचा मध्य असेल तर $\bar{z}$ = ?

(A) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$ (B) $\bar{x}+\bar{y}$ (C) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{n}$ (D) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2n}$

(vi*) पाच संख्यांचा मध्य 50 असून त्यांतील 4 संख्यांचा मध्य 46 आहे, तर पाचवी संख्या कोणती ?

(A) 4 (B) 20 (C) 434 (D) 66

(vii*) 100 प्राप्तांकांचा मध्य 40 आहे. जर त्यांतील 9 वा प्राप्तांक 30 आहे. त्याच्या जागी 70 घेतले व उरलेले प्राप्तांक तसेच ठेवले तर नवीन मध्य कोणता आहे ?

(A) 40.6 (B) 40.4 (C) 40.3 (D) 40.7

(viii) 19, 19, 15, 20, 25, 15, 20, 15 ह्या सामग्रीचा बहुलक कोणता ?

(A) 15 (B) 20 (C) 19 (D) 25

(ix) 7, 10, 7, 5, 9, 10 ह्या सामग्रीचा मध्यक कोणता?

(A) 7 (B) 9 (C) 8 (D) 10

(x) खालील सारणीनुसार 30-40 ह्या वर्गाची वरच्या वर्गमर्यादेपेक्षा कमी संचित वारंवारता किती?

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
वारंवारता	7	3	12	13	2

(A) 13 (B) 15 (C) 35 (D) 22

(2) 20 कर्मचाऱ्यांच्या पगारांचा मध्य 10,250 रुपये आहे. जर त्यामध्ये कार्यालय प्रमुखाचा पगार मिळवला तर मध्य 750 रुपयांनी वाढतो, तर कार्यालय प्रमुखाचा पगार काढा.

(3) नऊ संख्यांचा मध्य 77 आहे, जर त्यांच्यामध्ये पुन्हा एक संख्या मिळवली असता मध्य 5 ने वाढतो, तर मिळवलेली संख्या कोणती?

(4) एका शहराचे एका महिन्याचे दररोजचे कमाल तापमान सेल्सिअस अंशांमध्ये खालीलप्रमाणे आहे. योग्य वर्ग घेऊन वर्गीकृत वारंवारता वितरण सारणी (सलग वर्ग) तयार करा.

29.2, 29.0, 28.1, 28.5, 32.9, 29.2, 34.2, 36.8, 32.0, 31.0,
30.5, 30.0, 33, 32.5, 35.5, 34.0, 32.9, 31.5, 30.3, 31.4,
30.3, 34.7, 35.0, 32.5, 33.5, 29.0, 29.5, 29.9, 33.2, 30.2

सारणीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) कमाल तापमान 34°c पेक्षा कमी असणारे दिवस किती?

(ii) कमाल तापमान 34°c किंवा त्यापेक्षा जास्त असणारे दिवस किती ?

(5) जर खालील प्राप्तांकांचा मध्य 20.2 असेल तर p ची किंमत काढा-

x_i	10	15	20	25	30
f_i	6	8	p	10	6

(6) मॉडेल हायस्कूल नांदपूर येथील इयत्ता 9 वीच्या 68 विद्यार्थ्यांनी लेखी परीक्षेत गणितात 80 पैकी मिळवलेले गुण खाली दिले आहेत.

70, 50, 60, 66, 45, 46, 38, 30, 40, 47, 56, 68,
80, 79, 39, 43, 57, 61, 51, 32, 42, 43, 75, 43,
36, 37, 61, 71, 32, 40, 45, 32, 36, 42, 43, 55,
56, 62, 66, 72, 73, 78, 36, 46, 47, 52, 68, 78,
80, 49, 59, 69, 65, 35, 46, 56, 57, 60, 36, 37,
45, 42, 70, 37, 45, 66, 56, 47

30-40, 40-50 ...... हे वर्ग घेऊन वरच्या वर्ग मर्यादेपेक्षा कमी संचित वारंवारता सारणी तयार करा. त्या सारणीच्या आधारे पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) 80 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती?

(ii) 40 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती ?

(iii) 60 पेक्षा कमी गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती

(7) उदा. 6 मधील सामग्रीच्या आधारे 30-40, 40-50 .... असे वर्ग घेऊन खालच्या वर्ग मर्यादेपेक्षा जास्त संचित वारंवारता सारणी तयार करा. यावरून

(i) 70 किंवा 70 पेक्षा जास्त गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती?

(ii) 30 किंवा 30 पेक्षा जास्त गुण मिळवणारे विद्यार्थी किती?

(8) खालील 10 प्राप्तांक चढत्या क्रमाने मांडलेले आहेत.

45,47,50,52,x, x+2, 60,62,63,74 यांचा मध्यक 53 आहे. यावरून x ची किंमत काढा. तसेच दिलेल्या सामग्रीचा मध्य व बहुलक काढा.

गणिती गंमत

पास्कलचा त्रिकोण किंवा मेरूप्रस्तर

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

....

....

....

संख्यांचा वरील आकृतिबंध त्रिकोणाकार मांडणीत आहे. ही मांडणी पास्कलचा त्रिकोण म्हणून ओळखली जाते. या मांडणीतील पुढील तीन ओळी तुम्ही लिहा. या मांडणीत आडव्या ओळींत येणाऱ्या संख्या $(x + y)$ या द्विपदीच्या घातांच्या विस्ताराचे क्रमवार येणारे सहगुणक असतात. खालील विस्तार पाहा.

$(x + y)^0 = 1$

$(x + y)^1 = 1x + 1y$

$(x + y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$

$(x + y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x + y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$

या विस्तारांतील x आणि y च्या घातांकांचे निरीक्षण करा. त्यावरून $(x + y)^{10}$ चा विस्तार लिहिण्याचा प्रयत्न करा.

उत्तरसूची

1. संच

सरावसंच 1.1

(1) (i) $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ (ii) $\{2\}$ (iii) $\{-1, -2, -3, \ldots\}$ (iv) {सा, रे, ग, म, प, ध, नी}

(2) (i) $\frac{4}{3}$ हा संच Q चा घटक आहे. (ii) -2 हा संच N चा घटक नाही.

(iii) संच P चे घटक p असे आहेत की p ही विषम संख्या आहे.

(4) (i) A = {चैत्र, वैशाख, ज्येष्ठ, आषाढ, श्रावण, भाद्रपद, अश्विन, कार्तिक, अग्रहायण, पौष, माघ, फाल्गुन}

(ii) X = {C, O, M, P, L, E, N, T} (iii) Y = {नाक, कान, डोळे, जीभ, त्वचा}

(iv) Z = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}

(v) E = {आशिया, आफ्रिका, युरोप, ऑस्ट्रेलिया, अंटार्क्टिका, दक्षिण अमेरिका, उत्तर अमेरिका}

(5) (i) $A = \{x | x = n^2, n \in N, n \leq 10\}$ (ii) $B = \{x | x = 6n, n \in N, n < 9\}$

(iii) C = {y|y हे 'SMILE' या शब्दातील अक्षर आहे.}

(iv) D = {z|z हा आठवड्यातील दिवस आहे.} (v) X = {y|y हे 'eat' या शब्दातील अक्षर आहे}

सरावसंच 1.2

(1) A = B = C (2) A = B (3) संच A आणि C हे रिक्त संच आहेत.

(4) (i), (iii), (iv), (v) या उदाहरणातील संच सांत संच आहेत तर (ii), (vi), (vii) यांतील संच अनंत संच आहेत.

सरावसंच 1.3

(1) (i), (ii), (iii), (v) यांतील विधाने असत्य तर (iv), (vi) यांतील विधाने सत्य आहेत.

(4) {1}, {3}, {2}, {7}, {1, 3}, {1, 2}, {1, 7}, {3, 2}, {3, 7}, {2, 7}, {1, 3, 2}, {1, 3, 2, 7} यांसारखे कोणतीही 3.

(5) (i) $P \subseteq H$, $P \subseteq B$, $I \subseteq M$, $I \subseteq B$, $H \subseteq B$, $M \subseteq B$ (ii) संच B

(6) (i) N, W, I यांपैकी कोणताही संच (ii) N, W, I यांपैकी कोणताही संच

(7) गणितात 50% पेक्षा कमी गुण मिळवणाऱ्या विद्यार्थ्यांचा संच

सरावसंच 1.4

(1) n (B) = 21 (2) एकही पेय न घेणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या = 5

(3) एकूण विद्यार्थ्यांची संख्या = 70

(4) गिरिभ्रमण व आकाशदर्शन या दोन्हींपैकी कशाचीच आवड नसणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या = 20

फक्त गिरिभ्रमण आवडणारे विद्यार्थी = 20, फक्त आकाशदर्शन आवडणारे विद्यार्थी = 70

(5) (i) $A = \{x, y, z, m, n\}$ (ii) $B = \{p, q, r, m, n\}$

(iii) $A \cup B = \{x, y, z, m, n, p, q, r\}$ (iv) $U = \{x, y, z, m, n, p, q, r, s, t\}$

(v) $A' = \{p, q, r, s, t\}$ (vi) $B' = \{x, y, z, s, t\}$ (vii) $(A \cup B)' = \{s, t\}$

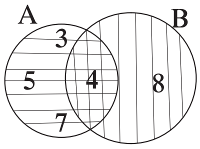
संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

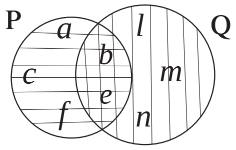
(1) (i) (C) (ii) (D) (iii) (C) (iv) (B) (v) (A) (vi) (A)

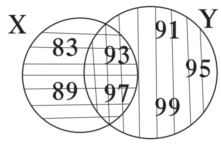
(2) (i) (A) (ii) (A) (iii) (B) (iv) (C)

(3) फक्त इंग्रजी बोलणारे 57, फक्त फ्रेंच बोलणारे 28, दोन्ही भाषा बोलणारे 15

(4) 135 (5) 12 (6) 4

(7) (i) 

(ii) 

(iii) 

(8) $S \subseteq X$, $V \subseteq X$, $S \subseteq X$, $T \subseteq X$, $S \subseteq Y$, $S \subseteq V$, $S \subseteq T$, $V \subseteq T$, $Y \subseteq T$,

(9) $M \cup \phi = M$, $M \cap \phi = \phi$

(10) U = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13}, A = {1, 2, 3, 5, 7} B = {1, 5, 8, 9, 10}
$M \cup B$ = {1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10}, $A \cap B$ = {1, 5}

(11) $n(A \cup B) = 16$

2. वास्तव संख्या

सरावसंच 2.1

(1) खंडित : (i), (iii), (iv) अखंड आवर्ती : (ii), (v)

(2) (i) 0.635 (ii) $0.\overline{25}$ (iii) $3.\overline{285714}$ (iv) 0.8 (v) 2.125

(3) (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{37}{99}$ (iii) $\frac{314}{99}$ (iv) $\frac{1574}{99}$ (v) $\frac{2512}{999}$

सरावसंच 2.2

(4) (i) −0.4, −0.3, 0.2 यांसारख्या असंख्य संख्या

(ii) −2.310, −2.320, −2.325 यांसारख्या असंख्य संख्या

(iii) 5.21, 5.22, 5.23 यांसारख्या असंख्य संख्या

(iv) −4.51, −4.55, −4.58 यांसारख्या असंख्य संख्या

सरावसंच 2.3

(1) (i) 3 (ii) 2 (iii) 4 (iv) 2 (v) 3

(2) (i), (iii), (vi) करणी आहे. व (ii), (iv), (v) करणी नाही.

(3) सजातीय करणी: (i), (iii), (iv) व विजातीय करणी : (ii), (v), (vi)

(4) (i) $3\sqrt{3}$ (ii) $5\sqrt{2}$ (iii) $5\sqrt{10}$ (iv) $4\sqrt{7}$ (v) $2\sqrt{42}$

(5) (i) $7\sqrt{2} > 5\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{247} < \sqrt{274}$ (iii) $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$

(iv) $5\sqrt{5} < 7\sqrt{5}$ (v) $4\sqrt{42} > 9\sqrt{2}$ (vi) $5\sqrt{3} < 9$ (vii) $7 > 2\sqrt{5}$

(6) (i) $13\sqrt{5}$ (ii) $10\sqrt{5}$ (iii) $24\sqrt{3}$ (iv) $\frac{12}{5}\sqrt{7}$

(7) (i) 54 (ii) $126\sqrt{5}$ (iii) $6\sqrt{10}$ (iv) 80

(8) (i) 7 (ii) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (iii) $\sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{62}$.

(9) (i) $\frac{3}{5}\sqrt{5}$ (ii) $\frac{\sqrt{14}}{14}$ (iii) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$ (iv) $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ (v) $\frac{11}{3}\sqrt{3}$

सरावसंच 2.4

(1) (i) $-3+\sqrt{21}$ (ii) $\sqrt{10}-\sqrt{14}$ (iii) $-18+13\sqrt{6}$

(2) (i) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$ (ii) $\frac{3\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)}{2}$ (iii) $28-16\sqrt{3}$ (iv) $4-\sqrt{15}$

सरावसंच 2.5

(1) (i) 13 (ii) 5 (iii) 28 (2) (i) 2 किंवा $\frac{4}{3}$ (ii) 1 किंवा 6 (iii) -2 किंवा 18 (iv) 0 किंवा -40

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

(1) (i) B (ii) D (iii) C (iv) D (v) A

(vi) C (vii) C (viii) C (ix) C (x) B

(2) (i) $\frac{555}{1000}$ (ii) $\frac{29539}{999}$ (iii) $\frac{9306}{999}$ (iv) $\frac{357060}{999}$ (v) $\frac{30189}{999}$

(3) (i) $-0.\overline{714285}$ (ii) $0.\overline{81}$ (iii) 2.2360679... (iv) $9.\overline{307692}$ (v) 3.625

(5) (i) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (ii) $-\frac{5}{3}\sqrt{5}$

(6) (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{10}$ (v) $\sqrt{2}$ (vi) $\sqrt{11}$

(7) (i) $6\sqrt{3}$ (ii) $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ (iii) $\frac{15}{2}\sqrt{6}$ (iv) $-25\sqrt{3}$ (v) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$

(8) (i) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (ii) $\frac{2\sqrt{7}}{21}$ (iii) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (iv) $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{37}$ (v) $\frac{6\left(4\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{23}$

3. बहुपदी

सरावसंच 3.1

(1) (i) नाही, कारण $\frac{1}{y}$ मध्ये y चा घातांक (-1) आहे.

(ii) नाही, कारण $5\sqrt{x}$ ला मध्ये x चा घातांक $\left(\frac{1}{2}\right)$ अपूर्णांक आहे.

(iii) आहे. (iv) नाही, कारण $2m^{-2}$ मध्ये घातांक (-2) आहे. (v) आहे.

(2) (i) 1 (ii) $-\sqrt{3}$, (iii) $-\frac{2}{3}$

(3) (i) x^7 (ii) $2x^{35}-7$ (iii) x^8-2x^5+3 या तिन्ही उदाहरणांत यांसारखी अनेक उत्तरे असू शकतात.

(4) (i) 0 (ii) 0 (iii) 2 (iv) 10 (v) 1 (vi) 5 (vii) 3 (viii) 10

(5) (i) वर्ग (ii) रेषीय (iii) रेषीय (iv) घन (v) वर्ग (vi) घन

(6) (i) $m^3 + 5m + 3$ (ii) $y^5 + 2y^4 + 3y^3 - y^2 - 7y - \frac{1}{2}$

(7) (i) $(1, 0, 0, -2)$ (ii) $(5, 0)$ (iii) $(2, 0, -3, 0, 7)$ (iv) $\left(\frac{-2}{3}\right)$

(8) (i) $x^2 + 2x + 3$ (ii) $5x^4 - 1$ (iii) $-2x^3 + 2x^2 - 2x + 2$

(9) वर्ग बहुपदी : x^2; $2x^2 + 5x + 10$; $3x^2 + 5x$; घन बहुपदी : $x^3 + x^2 + x + 5$; $x^3 + 9$

रेषीय बहुपदी : $x + 7$; द्विपदी : $x + 7$, $x^3 + 9$; त्रिपदी : $2x^2 + 5x + 10$; एकपदी : x^2

सरावसंच 3.2

(1) (i) $a + bx$ (ii) xy (iii) $10n + m$

(2) (i) $6x^3 - 2x^2 + 2x$ (ii) $-2m^4 + 2m^3 + 2m^2 + 3m - 6 + \sqrt{2}$ (iii) $5y^2 + 6y + 11$

(3) (i) $-6x^2 + 10x$ (ii) $10ab^2 + a^2b - 7ab$

(4) (i) $2x^3 - 4x^2 - 2x$ (ii) $x^8 + 2x^7 + 2x^5 - x^3 - 2x^2 - 2$ (iii) $-4y^4 + 7y^2 + 3y$

(5) (i) $x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 0$

(ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2 = (x^2 - x)(5x^3 + 9x^2 + 6x + 8) + (8x + 2)$

(6) $a^4 + 7a^4b^2 + 2b^4$

सरावसंच 3.3

(1) (i) भागाकार = $2m + 7$, बाकी = 45

(ii) भागाकार = $x^3 + 3x - 2$, बाकी = 9

(iii) भागाकार = $y^2 + 6y + 36$, बाकी = 0

(iv) भागाकार = $2x^3 - 3x^2 + 7x - 17$, बाकी = 51

(v) भागाकार = $x^3 - 4x^2 + 13x - 52$, बाकी = 200

(vi) भागाकार = $y^2 - 2y + 3$, बाकी = 2

सरावसंच 3.4

(1) 5 (2) 1 (3) $4a^2 + 20$ (4) -11

सरावसंच 3.5

(1) (i) -41 (ii) 7 (iii) 7 (2) (i) $1, 0, -8$ (ii) $4, 5, 13$ (iii) $-2, 0, 10$

(3) 0 (4) 2 (5) (i) 17 (ii) $2a^3 - a^2 - a$ (iii) 1544 (6) 92 (7) आहे

(8) 2 (9) (i) नाही (ii) आहे (10) 30 (11) आहे

(13) (i) -3 (ii) 80

सरावसंच 3.6

(1) (i) $(x + 1)(2x - 1)$ (ii) $(m + 3)(2m - 1)$ (iii) $(3x + 7)(4x + 11)$

(iv) $(y - 1)(3y + 1)$ (v) $(x + \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 1)$ (vi) $(x - 4)\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

(2) (i) $(x - 3)(x + 2)(x - 2)(x + 1)$ (ii) $(x - 13)(x - 2)$

(iii) $(x - 8)(x + 2)(x - 4)(x - 2)$ (iv) $(x^2 - 2x + 10)(x^2 - 2x - 2)$

(v) $(y^2 + 5y - 22)(y + 4)(y + 1)$ (vi) $(y + 6)(y - 1)(y + 4)(y + 1)$

(vii) $(x^2 - 8x + 18)(x^2 - 8x + 13)$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 3

(1) (i) D (ii) D (iii) C (iv) A (v) C (vi) A (vii) D (viii) C (ix) A (x) A

(2) (i) 4 (ii) 0 (iii) 9

(3) (i) $7x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 9$ (ii) $5p^4 + 2p^3 + 10p^2 + p - 8$

(4) (i) (1, 0, 0, 0, 16) (ii) (1, 0, 0, 2, 3, 15)

(5) (i) $3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 7x + 18$ (ii) $6x^3 + x^2 + 0x + 7$ (iii) $4x^3 + 5x^2 - 3x + 0$

(6) (i) $10x^4 + 13x^3 + 9x^2 - 7x + 12$ (ii) $p^3q + 4p^2q + 4pq + 7$

(7) (i) $2x^2 - 7y + 16$ (ii) $x^2 + 5x + 2$

(8) (i) $m^7 - 4m^5 + 6m^4 + 6m^3 - 12m^2 + 5m + 6$

(ii) $5m^5 - 5m^4 + 15m^3 - 2m^2 + 2m - 6$

(9) बाकी = 19 (10) $m = 1$ (11) एकूण लोकसंख्या $= 10x^2 + 5y^2 - xy$

(12) $b = \frac{1}{2}$ (13) $11m^2 - 8m + 5$ (14) $-2x^2 + 8x + 11$ (15) $2m + n + 7$

4. गुणोत्तर प्रमाण

सरावसंच 4.1

(1) (i) 6 : 5 (ii) 2 : 3 (iii) 2 : 3

(2) (i) 25 : 11 (ii) 35 : 31 (iii) 2 : 1 (iv) 10 : 17 (v) 2 : 1 (vi) 220 : 153

(3) (i) 3 : 4 (ii) 11 : 25 (iii) 1 : 16 (iv) 13 : 25 (v) 4 : 625

(4) 4 माणसे (5) (i) 60% (ii) 94% (iii) 70% (iv) 91% (v) 43.75%

(6) आभाचे वय 18 वर्षे आईचे वय 45 वर्षे (7) 6 वर्षांनी (8) रेहानाचे आजचे वय 8 वर्षे.

सरावसंच 4.2

(1) (i) अनुक्रमे 20, 49, 2.5 (ii) अनुक्रमे 7, 27, 2.25

(2) (i) $1 : 2\pi$ (ii) $2 : r$ (iii) $\sqrt{2} : 1$ (iv) 34 : 35

(3) (i) $\frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{3}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$ (iii) $\frac{5}{18} > \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1} > \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) 80° (ii) अल्बर्टचे आजचे वय 25 वर्षे, सलीमचे आजचे वय 45 वर्षे

(iii) लांबी 13.5 सेमी, रुंदी 4.5 सेमी (iv) 124, 92 (v) 20, 18

(5) (i) 729 (ii) 45 : 7 (6) 2 : 125 (7) $x = 5$

सरावसंच 4.3

(1) (i) 22 : 13 (ii) 125 : 71 (iii) 316 : 27 (iv) 38 : 11

(2) (i) 3 : 5 (ii) 1 : 6 (iii) 7 : 43 (iv) 71 : 179 (3) 170 : 173

(4) (i) $x = 8$ (ii) $x = 9$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = 6$ (v) $x = \frac{9}{14}$ (vi) $x = 3$

सरावसंच 4.4

(1) (i) 36, 22 (ii) 16, $2a - 2b + 2c$

(2) (i) 29 : 21 (ii) 23 : 7 (4) (i) $x = 2$ (ii) $y = 1$

सरावसंच 4.5

(1) $x = 4$ (2) $x = \frac{347}{14}$ (3) 18, 12, 8 किंवा 8, 12, 18 (6) $\frac{x+y}{xy}$

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 4

(1) (i) B (ii) A (iii) B (iv) D (v) C

(2) (i) 7 : 16 (ii) 2 : 5 (iii) 5 : 9 (iv) 6 : 7 (v) 6 : 7

(3) (i) 1 : 2 (ii) 5 : 4 (iii) 1 : 1

(4) (i) व (iii) परंपरित प्रमाणात आहेत (ii) व (iv) परंपरित प्रमाणात नाहीत. (5) $b = 9$

(6) (i) 7.4% (ii) 62.5% (iii) 73.33% (iv) 31.25% (v) 12%

(7) (i) 5 : 6 (ii) 85 : 128 (iii) 1 : 2 (iv) 50 : 1 (v) 3 : 5

(8) (i) $\frac{17}{9}$ (ii) 19 (iii) $\frac{35}{27}$ (iv) $\frac{13}{29}$

(11) $x = 9$

5. दोन चलांतील रेषीय समीकरणे

सरावसंच 5.1

(3) (i) $x = 3$; $y = 1$ (ii) $x = 2$; $y = 1$ (iii) $x = 2$; $y = -2$

(iv) $x = 6$; $y = 3$ (v) $x = 1$; $y = -2$ (vi) $x = 7$; $y = 1$

सरावसंच 5.2

(1) 5 रुपयांच्या 30 नोटा व 10 रुपयांच्या 20 नोटा आहेत.

(2) $\frac{5}{9}$ (3) प्रियांकाचे वय 20 वर्षे, दीपिकाचे वय 14 वर्षे (4) 20 सिंह, 30 मोर

(5) सुरुवातीचा पगार ₹ 3900, वार्षिक वाढ ₹ 150

(6) ₹ 4000 (7) 36 (8) $\angle A = 90^0$, $\angle B = 40^0$, $\angle C = 50^0$

(9) 420 सेमी (10) 10

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 5

(1) (i) A (ii) C (iii) C

(2) (i) $x = 2$; $y = 1$ (ii) $x = 5$; $y = 3$ (iii) $x = 8$; $y = 3$

(iv) $x = 1$; $y = -4$ (v) $x = 3$; $y = 1$ (vi) $x = 4$; $y = 3$

(3) (i) $x = 1$; $y = -1$ (ii) $x = 2$; $y = 1$ (iii) $x = 26$; $y = 18$ (iv) $x = 8$; $y = 2$

(4) (i) $x = 6$; $y = 8$ (ii) $x = 9$; $y = 2$ (iii) $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{3}$ (5) 35

(6) ₹ 71 (7)प्रत्येकाचे मासिक उत्पन्न अनुक्रमे ₹ 1800 व ₹ 1400

(8) लांबी 347 एकक, रुंदी 207 एकक (9) 40 किमी/तास, 30 किमी/तास

(10) (i) 54, 45 (ii) 36, 63 इत्यादी.

6. अर्थनियोजन

सरावसंच 6.1

(1) ₹ 1200 (2) दुसऱ्या वर्षानंतरचे भांडवल ₹ 42,000, मूळ भांडवलावर शेकडा 16 तोटा झाला.

(3) मासिक उत्पन्न ₹ 50,000 (4) श्री. फर्नांडीस (5) ₹ 25,000

सरावसंच 6.2

(1) (i) आयकर भरावा लागणार नाही (ii) भरावा लागेल (iii) भरावा लागेल

(iv) भरावा लागेल (v) भरावा लागणार नाही

(2) ₹ 9836.50

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 6

(1) (i) A (ii) B (2) उत्पन्न ₹ 8750

(3) हिरालालचा शेकडा फायदा 36.73, रमणिकलालचा शेकडा फायदा 16.64, हिरालाल

(4) ₹ 99383.75 (5) ₹ 4,00,000 (6) 12.5%

(7) रमेशची बचत ₹ 48000 ; सुरेशची बचत ₹ 51000 ; प्रितीची बचत ₹ 36000

(8) (i) ₹ 213000 (ii) ₹ 7500 (iii) कर नाही.

7. सांख्यिकी

सरावसंच 7.2

(1) प्राथमिक सामग्री : (i), (iii), (iv) दुय्यम सामग्री : (ii)

सरावसंच 7.3

(1) खालची वर्ग मर्यादा = 20, वरची वर्ग मर्यादा = 25 (2) 37.5 (3) 7-13

सरावसंच 7.4

(3) (i) 38 (ii) 3 (iii) 19 (iv) 62 (4) (i) 24 (ii) 3 (iii) 43 (iv) 43

सरावसंच 7.5

(1) 7 क्विंटल (2) 74 (3) 100 (4) ₹ 4900 (5) 75 ग्रॅम

(6) मध्य = 3, मध्यक = 3, बहुलक = 4 (7) 78.56 (8) $x = 9$ (9) 20 (10) 70

(11) 34.25 (12) 37 किग्रॅ (13) 2 (14) 35 व 37

संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 7

(1) (i) C (ii) B (iii) D (iv) B (v) A (vi) D

(vii) B (viii) A (ix) C (x) C

(2) ₹ 26000 (3) ₹ 127

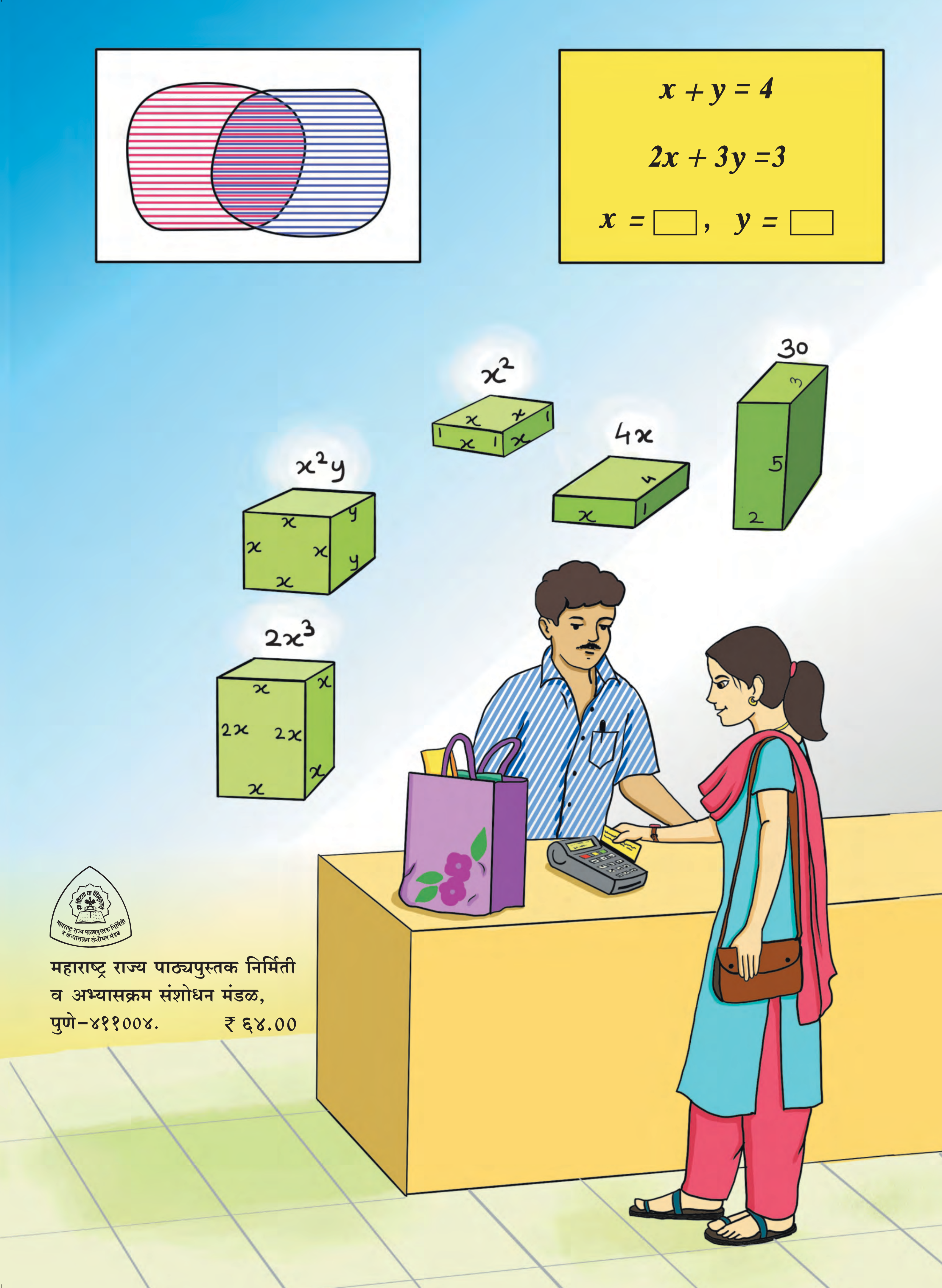
(4) (i) 24 (ii) 06

(5) P = 20

(6) (i) 66 (ii) 14 (iii) 45

(7) (i) 11 (ii) 68

(8) $x = 52$, मध्य = 55.9, बहुलक = 52



महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती
व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ,
पुणे–४११००४. ₹ ६४.००